Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques
Fès

Année Universitaire 2025/2026
Parcours : TC GMSI
Responsable : M. El Ahmadi

TD : Série N°4

Exercice 1.
Soit f une fonction dérivable en un point x_0. Montrer que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0).$$

Réciproquement, si $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ existe, peut-on dire que f est dérivable en x_0 ?

Exercice 2.
Étudier la dérivabilité puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
2. $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$
3. $f_3(x) = x\,|x|$.
4. $f_4(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x\ln(x) - x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

Exercice 3.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x}, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ e^{bx} - x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. À l'aide de la règle de l'Hôpital, calculer la limite suivante : $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.
2. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$.

1. Montrer que f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists c \in]a, a+2\pi[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 5.
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$ tels que $a < b$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que

$$f(a) = f(b) = 0, \qquad f'(a) > 0, \qquad f'(b) > 0.$$

Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in]a, b[$ tels que

$$c_1 < c_2 < c_3, \qquad f(c_2) = 0, \qquad f'(c_1) = f'(c_3) = 0.$$

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que : $f(x) - f(x+1) = c^{-2}e^{\frac{1}{c}}$.
2. En utilisant 1), montrer que $\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = 1$.

Exercice 7.
Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|$.
2. $\forall x \geq 0, \quad x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.

Exercice 8.

1. Calculer lorsque cela est possible :

   (a) $\arccos(\cos(\frac{2\pi}{3}))$.

   (b) $\arcsin(2)$.

   (c) $\arcsin(\sin(\frac{4\pi}{3}))$.

   (d) $\arctan(\sqrt{3})$.

2. Simplifier les expressions suivantes en précisant, pour chacune, l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression est bien définie :

   (a) $A(x) = \tan(\arcsin x)$.

   (b) $B(x) = \sin(\arccos x)$.

   (c) $C(x) = \cos(\arctan x)$.

Exercice 9.

Montrer les égalités suivantes :

1. $\forall x > 0 : \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} : \quad \arctan(x) + 2\arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \frac{\pi}{2}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} : \quad \left(\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}\right)^n = \frac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)}$.

Exercice 10.

1. Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n des fonctions définies par :

   (a) $f_1(x) = e^x\cos(x)$, $n = 3$.

   (b) $f_2(x) = \ln(1+x)\cdot\sin(x)$, $n = 4$.

   (c) $f_3(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$, $n = 3$.

   (d) $f_4(x) = \sin(x^2)(e^{-x} - 1)$, $n = 5$.

   (e) $f_5(x) = (1 + \arctan(x))(e^x + 2\sin(x))$, $n = 3$.

   (f) $f_6(x) = \operatorname{argch}(\sqrt{2+x^2})$, $n = 5$.

   (g) $f_7(x) = \dfrac{2\sin(x) - \arctan(x)}{\ln(1+x)}$, $n = 2$.

   (h) $f_8(x) = \dfrac{\ln(1+x^3)}{\tan(x) - x}$, $n = 2$.

   (i) $f_9(x) = (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$, $n = 5$.

   (j) $f_{10}(x) = (1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}$, $n = 3$.

2. Déterminer le développement limité au voisinage de x_0 à l'ordre n des fonctions définies par :

   (a) $f_1(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$, $x_0 = -1$ et $n = 2$.

   (b) $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{x^2}$, $x_0 = 1$ et $n = 2$.

   (c) $f_3(x) = (1+\sin(x))^x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et $n = 2$.

   (d) $f_4(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$, $x_0 = 1$ et $n = 1$.

3. Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

   de trois façons différentes :

   (a) Par la formule de Taylor-Young.

   (b) Par composition de développements limités.

   (c) En commençant par calculer le développement limité de la fonction dérivée f'.