TD : Série N°3

Exercice 1.
Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1-\sin(n)}{1+n\sqrt{n}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^n-1}{\sqrt{n}}$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{2+n}}$.
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 1-\cos\frac{1}{n}$.
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+\sin n^5}$.
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-2n}+\sqrt{n}}{n^2+1}$.
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$.
8. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n^2}(\sin(\alpha))^{2n}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 2.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \arcsin\left(\frac{n+1}{n^2+3}\right)$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \geq n(\ln(n)-1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \ln(k)$.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ converge.

Exercice 4 (Règle de Raabe et Duhamel)**.**
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$
Montrer que
(a) si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge,
(b) si $\alpha < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Exercice 5.
On se donne une série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} a_n$. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} \sqrt{a_n a_{2n}}$.
2. $\sum_{n\geq 0} a_n^2$.
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

Exercice 6.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans $\mathbb{R}_+$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 > 0, \\ \forall n \in \mathbb{N} : \; u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}. \end{cases}$$

Montrer l'équivalence :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n \text{ converge.}$$

Exercice 7.
Le but de cet exercice est de calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Montrer que
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$
   (b) En déduire que
$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt = 0.$$
3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0, \pi]$, on a
$$A_n(t) = \frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}.$$
4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,
$$\int_0^\pi \left(at^2 + bt\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$
   (b) Vérifier alors que
$$\int_0^\pi \left(at^2 + bt\right) A_n(t) dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$
5. Déduire des questions précédentes que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$.