Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques
Fès

Année Universitaire 2025/2026
Parcours : TC GMSI
Responsable : M. El Ahmadi

TD : Série N°3

Exercice 1.

1. En utilisant la définition d'une limite, montrer que :

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{2}{1+e^{-\frac{1}{|x|}}} = 2.$

   (b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x+e^{-x}} = +\infty.$

2. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim_{x\to 0^+} E(\frac{1}{x}).$

   (b) $\lim_{x\to 0^+} xE(\frac{1}{x}).$

   (c) $\lim_{x\to 0} x\cos(\frac{1}{x}).$

   (d) $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha E(\frac{1}{x^\beta})$, où $(\alpha, \beta > 0)$.

Exercice 2.
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

1. Montrer que
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0.$$
2. Montrer que si $L > 0$,
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty.$$

Exercice 3.
Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. On rappelle que D est **dense** dans $\mathbb{R}$ si entre deux nombres réels distincts, il existe au moins un élément de D. On écrit $\overline{D} = \mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\overline{D} = \mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists (u_n) \subset D, \quad \lim_{n\to +\infty} u_n = x.$$
2. On suppose que $\overline{D} = \mathbb{R}$ et on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.
   (a) Montrer que si $\forall x \in D, \quad f(x) = 0$, alors $f \equiv 0$ (fonction identiquement nulle).
   (b) Montrer que si $\forall x \in D, \quad f(x) = g(x)$, alors $f \equiv g$.

Exercice 4.
Étudier la continuité des fonctions numériques de la variable réelle suivantes sur leurs domaines de définition :

1. $f_1(x) = \begin{cases} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
2. $f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -x^2 + x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$
3. $f_3(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice 5.
Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair s'annule en au moins un point. Autrement dit, prouver qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$.

Exercice 6.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f([a, b]) \subset [a, b]$.
   Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
2. On suppose maintenant que $[a, b] \subset f([a, b])$.
   (a) Soient $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que
   $$f(x_m) = m = \inf_{a \le x \le b} f(x), \qquad f(x_M) = M = \sup_{a \le x \le b} f(x).$$
   Vérifier que $x_m \in [m, M]$ et $x_M \in [m, M]$.
   (b) En déduire qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 7.

1. Montrer que, pour tout $a \in]0, 1]$, la fonction
   $$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2},$$
   est uniformément continue sur l'intervalle $[a, 1]$, mais n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.
2. Montrer que la fonction
   $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2,$$
   est uniformément continue sur tout intervalle fermé et borné $[a, b]$, mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose
   $$h(t) = \sup_{x \in [a,b]} \{f(x) + tg(x)\}.$$
   Montrer que h est lipschitzienne.