TD : Série N° 3

Exercice 1.

1. Étudier la dérivabilité (au sens de $\mathbb{C}$) et calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   (a) $f(z) = \frac{1}{|z|^2}(Re(z) - iIm(z))$.
   (b) $g(z) = Im(z)z$.
   (c) $h(z) = e^z + \overline{z}$.
2. Déterminer les constantes a, b et c pour que la fonction $f(x + iy) = x + ay + i(bx + cy)$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2.
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. Montrer que si $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$, alors f est une fonction constante.
2. Montrer que si $|f|$ est une fonction constante, alors f est aussi constante.
   Indication : On rappel que si $(x, y) \mapsto P(x, y)$ est une fonction différentiable sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{R}^2$ telle que $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, alors P est constante sur U.

Exercice 3.
Considérons la fonction $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $P(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

1. Montrer que P est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. Trouver toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la Partie réelle est la fonction P.
3. Calculer $f'(z)$ par deux méthodes.

Exercice 4.

1. Calculer $\displaystyle\int_\gamma (2\overline{z} + 5)dz$, où γ est le segment $[i + 1; 1]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} (2\overline{z} + 3|z|^2)dz$, où γ_1 est le segment $[-2, 2]$ et $\gamma_2(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.
3. Soient $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \cos(nz)dz$ par deux méthodes différentes.

Exercice 5.
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{3z + 1}{z(z - 2)^2}dz$ dans les cas suivants :

1. Le chemin γ est le cercle définie par l'équation $|z - 1| = \frac{1}{2}$.
2. Le chemin γ est le cercle définie par l'équation $|z| = 1$.
3. Le chemin γ est le cercle définie par l'équation $|z - 2| = \frac{1}{2}$.
4. Le chemin γ est le cercle définie par l'équation $|z| = 3$.

Exercice 6.

1. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

   (a) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(in)^{n-1}}{n} z^n$.
   (b) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} e^{-n^2} z^n$.
   (c) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$.
   (d) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$.
   (e) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$.
   (f) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} z^{n^2}$.

2. Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ est semi-convergente. Déterminer la valeur de R.
3. Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

(a) $\sum_{n\geq 0}(n-1)(z-1)^n$.

(b) $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n$.

(c) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

(d) $\sum_{n\geq 0} \sin(n)x^n$.

Exercice 7.
Soit $f(z) = \frac{z^2-3z+3}{(2-z)(z-1)^2}$.

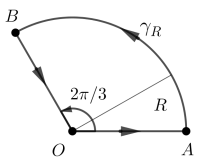
1. Développer $f(z)$ en série de Taylor sur le disque $D(0,1)$.
2. Développer $f(z)$ en série de Laurent sur la couronne $\Delta(1,0,1)$.

Exercice 8.

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin(\theta)}d\theta$.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}dx$.

   Indication : Intégrer la fonction $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+1}$ sur le chemin $\Gamma_R = [-R,R] \cup \gamma_R^+$, où γ_R est le demi-cercle supérieure de centre 0 et de rayon $R > 1$.

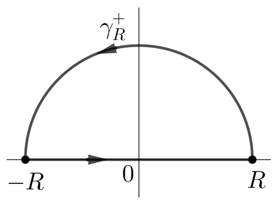
Exercice 9.



Considérons la fonction $f(z) = \frac{1}{z^3+1}$ et le chemin Γ_R ci-après :

1. Montrer que $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \frac{2\pi i}{3e^{\frac{2\pi i}{3}}}$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.
3. Déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}dx$.

Exercice 10.



Le chemin Γ_R^+.

Considérons la fonction de variable complexe $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$, et soit Γ_R^+ $(R > 3)$ le chemin formé par la composée du segment $[-R,R]$ et le demi-cercle supérieur γ_R^+ de centre 0 et de rayon R (voir la figure).

1. En utilisant les résidus, calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_R^+} f(z)dz$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R^+} f(z)dz = 0$.
3. Déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+4x+5}dx$.