Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques
Fès

Année Universitaire 2024/2025
Filière : MIP-S4
Prof. : M. El Ahmadi

# TD : Série N°2

**Exercice 1.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $2\pi$-périodique définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 2\pi \end{cases}$

1. Tracer la courbe de $f$.
2. Déterminer les coefficients de Fourrier de $f$.
3. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

**Exercice 2.**
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |\sin(x)|$.

1. Calculer les coefficients de Fourrier associées à la fonction $f$.
2. Étudier la convergence de la série de Fourrier de $f$ et préciser sa somme.
3. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$.

**Exercice 3.**
Soit $f$ une fonction impaire, $2\pi$ - périodique et qui est définie sur l'intervalle $]0, \pi[$ par $f(x) = x(\pi - x)$.

1. Tracer la courbe puis calculer les coefficients de Fourier associées à $f$.
2. Etudier la convergence sur $\mathbb{R}$ de $SF(f)$ vers $f$.
3. En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

**Exercice 4.**
Considérons la fonction $2\pi$ périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = e^x$.

1. Calculer les coefficients de Fourier complexes associées à $f$.
2. Déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

**Exercice 5.**
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Considérons la fonction $2\pi$-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de $f$.
2. Montrer que la série de Fourier de $f$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f$.
3. Déduire la relation
$$\frac{\pi}{\alpha \sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$
4. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.