Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques
Fès

Année Universitaire 2024/2025
Parcours : TC GESE & MSD
Responsable : M. El Ahmadi

TD : Série N°2

Exercice 1.
Etudier la nature et, en cas de convergence, calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)}dx.$
2. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2(x)}dx.$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx.$
4. $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx.$
5. $\int_0^{\pi/2} \tan(x)dx.$
6. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx.$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx.$
8. $\int_0^{e^{-1}} \frac{1}{x\ln(x)}dx.$
9. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx.$
10. $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx.$
11. $\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right] dx.$
12. $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Exercice 2.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales généralisées suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right) dt.$
2. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt.$
3. $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}dt.$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3}e^{\frac{-1}{t}}dt.$

Exercice 3.

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ converge et déterminer sa valeur.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. En utilisant le changement de variable $t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$, calculer l'intégrale généralisée $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}dt.$

Exercice 4.
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ converge.

1. Montrer que, pour $\alpha > 0$, on a : $\int_\alpha^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}dt = \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(t)}{t}dt.$
2. Déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}dt$ converge et vaut $f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
3. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ converge et déterminer sa valeur.
4. Déduire de la question précédente la convergence et la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}dt.$

Exercice 5.
Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt.$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}dt.$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}dt.$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha}dt.$

Exercice 6.

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt.$$

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n sont bien définis.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = I_{n+1}$. En déduire la valeur de I_n.
3. Soit $\phi : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$.
4. Montrer que la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
5. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n - I_n = 0$.
6. Montrer, en utilisant un changement de variables, que $\underset{n\to+\infty}{J}{}_n = I$.
7. En déduire la valeur de I.

Exercice 7.

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$ est convergente.
2. Soient f et g les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt.$$

   (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
   (c) Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2g'(x)g(x)$.
   (e) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{4} - (g(x))^2$.
   (f) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 8.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, où

$$\int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} (g(t))^2 dt$$

   convergent. Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$ converge absolument.

2. Soit

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[) \text{ où } \int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt \text{ converge} \right\}.$$

   Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0, +\infty[)$.