TD: Série N°2

Exercice 1.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique et $\ell \in [-\infty, +\infty]$. En utilisant la définition, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \forall p \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} u_{n+p} = \ell.$$

2. Étudier la convergence des suites numériques suivantes de terme général u_n :

(a) $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

(b) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

(c) $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$.

(d) $u_n = \dfrac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}$.

(e) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k!$.

(f) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.

Exercice 2.
Montrer que la suite $(u_n)_n$ de terme général u_n défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{3\times 6\times\cdots\times(3n+3)}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique croissante et $\ell \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell$.
   (b) Montrer que si (u_n) est non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que si A est bornée, il existe deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de A telles que:
   $$u_n \longrightarrow \sup(A) \quad \text{et} \quad v_n \longrightarrow \inf(A).$$
   (b) Montrer que si A est non majorée (resp. non minorée), il existe (w_n) (resp. (x_n)) une suite d'éléments de A telle que $w_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $x_n \longrightarrow -\infty$).

Exercice 4.

1. Pour chacun des cas suivants, montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad$ et $\quad v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad$ et $\quad v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$.

(c) $u_0 = a > 0, \quad v_0 = b > a, \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad$ et $\quad v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$.

2. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites réelles définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}.$$

(a) Montrer que les deux suites sont adjacentes.

(b) Soit e la limite commune de ces deux suites. Montrer que e n'est pas rationnel.

Exercice 5.
Soit $(u_n)_n$ une suite numérique vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leq q^n$ où $q \in]0, 1[$.

1. Montrer que (u_n) est une suite de Cauchy, puis déduire sa nature.

2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

   (b) Déduire que (u_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 6.

1. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$\ln(1 + x) \leq x \leq -\ln(1 - x).$$

2. On se donne $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général:

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{np}.$$

Exercice 7.
Étudier la convergence des quatre suites récurrentes suivantes:

1. $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n^2}$.

2. $v_0 \in]0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{1 + 2v_n^2}{1 + v_n}$.

3. $w_0 \in \left]\dfrac{1}{2}, 2\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \sqrt{w_n^2 - w_n + 1}$.

4. $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{z_n}$.