Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques
Fès

Année Universitaire 2024/2025
Filière : MIP-S4
Prof. : M. El Ahmadi

# TD : Série N°1

**Exercice 1** (Convergence simple).
Étudier la convergence simple des séries de fonctions de termes généraux :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n-x}, \quad h_n(x) = nx^n \ln(x).$$

**Exercice 2** (Convergence simple et uniforme).
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions de termes généraux :

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}, \quad g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x^2+n^2}, \quad h_n(x) = \frac{x^2\sin(nx)}{x^2+n^2}.$$

**Exercice 3** (Convergence simple et uniforme).
On considère la séries des fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = nx^{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $[0,1[$. Déterminer sa fonction somme $S$.
2. La série $\sum f_n(x)$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1[$ ?

**Exercice 4** (Convergence simple, uniforme et normale).
Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonction donnée sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n+x}.$$

**Exercice 5** (Convergence simple, uniforme et normale).
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_n(x) = \frac{(x\ln(x))^n}{n!} \text{ si } x \neq 0.$$

1. Montrer que $\sum f_n$ est une série de fonctions continues convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$.
2. En déduire que $\int_0^1 x^x dx = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.