TD : Série N° 1

Exercice 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n} E(nx).$$

1. Montrer que f_n est une fonction en escalier sur $[0,1]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Exercice 2 (Fonction de Thomae)**.**
Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \text{ avec } pgcd(p,q) = 1, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout intervalle $[a,b] \subset [0,1]$, $\inf\limits_{x\in[a,b]} g(x) = 0$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un nombre fini de points $x \in [0,1]$ tels que $g(x) \geq \varepsilon$.
3. En déduire qu'il existe une subdivision σ de $[0,1]$ telle que $S(g,\sigma) - s(g,\sigma) < \varepsilon$.
4. Conclure que g est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ et déterminer $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.

Exercice 3.
Soit $a \in]0,1[$. On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a^n & \text{si } x \in]a^{n+1}, a^n] \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0,1]$ et en déduire qu'elle est intégrable au sens de Riemann.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère la subdivision $\sigma_N = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N+1}\}$ de $[0,1]$ définie par :

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_k = a^{N+1-k} \quad \text{pour } k \in \{1, \ldots, N+1\}.$$

   (a) Montrer que sur l'intervalle $[x_0, x_1]$, on a $\sup\limits_{t\in[x_0,x_1]} f(t) - \inf\limits_{t\in[x_0,x_1]} f(t) = a^N$.
   (b) Montrer que sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}]$ pour $k \in \{1, \ldots, N\}$, la fonction f est constante.
   (c) En déduire que $S(f,\sigma_N) - s(f,\sigma_N) = a^{2N}$.
   (d) Conclure que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que $S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon$.
3. On pose $I_N = \displaystyle\int_{a^N}^1 f(x)\,dx$.
   (a) Justifier que $I_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \int_{a^{n+1}}^{a^n} f(x)\,dx = (1-a) \sum_{n=0}^{N-1} (a^2)^n$.
   (b) En déduire l'expression de I_N en fonction de a et N.
4. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ en faisant tendre N vers $+\infty$.

Exercice 4 (Inégalité de Minkowski)**.**
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Montrer que

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} + \sqrt{\int_a^b (g(x))^2 dx}.$$

Exercice 5.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann, positive, et vérifiant

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0.$$

Montrer que l'ensemble $A = \{\, t \in [a, b] \mid f(t) = 0 \,\}$ est dense dans $[a, b]$.

Exercice 6.
En utilisant les sommes de Riemann, calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2n + 3k}$.
2. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$.
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{\pi}{k}$.
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n + k^2}{n^3 + k^3}$.
6. $u_n = \displaystyle n^2 \prod_{k=1}^{n} k^{-\frac{4k}{n^2}}$.

Exercice 7.
En utilisant les primitives usuelles, déterminer les primitives ou calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\ln(3x)}$.
2. $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan(x)}}{1 + x^2}dx$.
3. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx$.
4. $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1 + e^{2t}}dt$.
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2(x)}}$.
6. $\displaystyle\int \frac{\cos(x) - \sin(x)}{1 + \cos^2(x)}dx$.

Exercice 8.

1. En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}dt$. (b) $\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(t)dt$. (c) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)dt$. (d) $\displaystyle\int_1^e \sin(\ln(t))dt$.

2. Pour $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx}\sin(x)dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx}\cos(x)dx.$$

   (a) En intégrant par parties de deux façons différentes, établir que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n.$$

   (b) En déduire les valeurs de I_n et J_n.

Exercice 9.
En effectuant un changement de variable approprié, déterminer une primitive des fonctions suivantes et calculer les intégrales définies lorsqu'elles sont précisées :

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(\ln^2(x) - 4\right)}$.
2. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\left(\cos^2(x) + 2\cos(x) + 5\right)^2}dx$.
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$.
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x - 1}}$.
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}dx$.

Exercice 10.
Soient $a, b > 0$. Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{a + b\cos^2(t)}dt$.
2. $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sin^2(t) + 3\cos^2(t)}dt$.
3. $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(t\sin(t) + \cos(t))^2}dt$.