TD: Série N°1

Exercice 1.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par:
$$f_n(x) = \frac{1}{n}E(nx),$$
où $E(nx)$ désigne la partie entière du nombre réel nx.
Montrer que f_n est une fonction en escalier sur $[0,1]$ et calculer $\int_0^1 f_n(x)dx$.

2. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$ est Riemann-intégrable sur l'intervalle $I = [1, \alpha]$ avec $\alpha > 1$.

3. Montrer que la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par:
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \text{ avec } pgcd(p,q) = 1, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0, \end{cases}$$
est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 2.

1. La fonction $f : \left[1, \frac{7}{3}\right]$, définie pour $1 \leq x \leq \frac{7}{3}$, par:
$$f(x) = E(x),$$
possède-t-elle une fonction primitive sur l'intervalle $\left[1, \frac{7}{3}\right]$?

2. Peut-on cependant calculer $\int_1^{\frac{7}{3}} f(x)dx$?

Exercice 3.
Soit $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, la fonction définie pour $0 \leq x \leq 1$, par:
$$\phi(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction ϕ est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\phi'(x)$.

2. Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in [0,1]$ par
$$f(x) = \phi'(x),$$
possède une primitive sur l'intervalle $[0,1]$, mais que f n'est pas bornée. Conclusion?

Exercice 4 (Inégalité de Minkowski)**.**
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Montrer que
$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} + \sqrt{\int_a^b (g(x))^2 dx}.$$

Exercice 5.

1. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Vérifier que si $x \in [a,b]$, alors $a+b-x \in [a,b]$.

2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout élément $x \in [a,b]$, on ait:
$$f(a+b-x) = f(x).$$
Montrer que
$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

3. Calculer l'intégrale $\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$.

Exercice 6.
En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites des suites suivantes:

1. $u_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2n+3k}$.
2. $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$.
4. $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{\pi}{k}$.
5. $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$.
6. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3}$.
7. $u_n = n^2 \prod_{k=1}^{n} k^{-\frac{4k}{n^2}}$.
8. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.
9. $u_n = n\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{-n}{k}}}{k^2}$.

Exercice 7.
En utilisant les primitives usuelles, déterminer les primitives ou calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_0^1 x\left(2x^2+4\right)^3 dx$.
2. $\int (x+\sqrt{x})^2 dx$.
3. $\int_1^e \frac{dx}{x\ln(3x)}$.
4. $\int \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2} dx$.
5. $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx$.
6. $\int_0^x \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$.
7. $\int_0^2 \left|x^2-3x+2\right| dx$.
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$.
9. $\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$.

Exercice 8.

1. En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

   (a) $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt$. (b) $\int_0^\pi t^2\cos(t)dt$. (c) $\int_0^1 \arctan(t)dt$. (d) $\int_1^e \sin(\ln(t))dt$.

2. Pour $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx}\sin(x)dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx}\cos(x)dx.$$

   (a) En intégrant par parties de deux façons différentes, établir que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n.$$

   (b) En déduire les valeurs de I_n et J_n.

Exercice 9.
En effectuant un changement de variables, déterminer les primitives ou calculer les intégrales suivantes:

1. $\int \frac{dx}{x(\ln^2(x)-4)}$.
2. $\int \frac{\sin(x)}{(\cos^2(x)+2\cos(x)+5)^2}$.
3. $\int \frac{e^{3x}+6e^{2x}-e^x}{(e^x-3)^2(e^x-1)} dx$.
4. $\int \sqrt{x^2+2x+2} dx$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$.
7. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$.
8. $\int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$.
9. $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+2\tan^2(x)} dx$.

Exercice 10.
Calculer les primitives suivantes:

1. $\int_0^x \frac{1}{a+b\cos^2(t)} dt$ avec $a, b > 0$.
2. $\int_0^x \frac{1}{\sin^2(t)+3\cos^2(t)} dt$.
3. $\int 0^x \frac{t^2}{(t\sin(t)+\cos(t))^2} dt$.