Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques
Fès

Année Universitaire 2025/2026
Filière : TC GMSI
Responsable : M. El Ahmadi

TD : Série N°1

Exercice 1.

1. Montrer que :
   i) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2$: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Dans quel cas a-t-on égalité ?
   ii) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$: $\left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$.
2. Soient x, y et z des nombres réels.
   i) Montrer que : $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
   ii) En déduire l'inégalité : $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.
   iii) Montrer que si x, y et z sont positifs ou nuls, alors
   $$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$$

Exercice 2.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que : $\forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leq \varepsilon$. Montrer que $a = 0$.
2. Soient a et b deux nombres réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad b < x \implies a < x$.
   Montrer que $a \leq b$.

Exercice 3.

1. **Inégalité de Bernoulli**
   Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
2. **Inégalité de Minkowski**
   Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$.
3. **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
   Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$.

Exercice 4.
Soit A une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble
$$B = \{|x-y| \ ; \ (x,y) \in A^2\}.$$

1. Justifier que B est majorée.
2. On note $\delta(A)$ la borne supérieure de l'ensemble B.
   (a) Justifier l'existence de $\delta(A)$.
   (b) Prouver que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 5.
Pour chacun des sous-ensembles suivants, donner sa borne supérieure et sa borne inférieure dans $\mathbb{R}$ (si elles existent), et préciser s'il possède un maximum et un minimum.

1. $B = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. $C = \{1 - \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
3. $A = [-1, 3[\cap \mathbb{Q}$.

Exercice 6.
On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ désigne la partie entière de x. On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par
$$A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid E(x^2 + 2x) = 1 \,\}.$$

1. Donner la définition de la partie entière d'un réel $x \in \mathbb{R}$.
2. Mettre A sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
3. Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, ainsi que le maximum et le minimum de A.

Exercice 7.
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B, \quad a \leq b.$$

Montrer que A est majorée, B est minorée et

$$\sup(A) \leq \inf(B).$$

Exercice 8.

1. Vérifier que, pour tous réels $x_i, x_j > 0$, on a :

$$\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} = \frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i x_j} \geq 2.$$

2. Soit $n \geq 1$ fixé. Déterminer :

$$\inf \left\{ (x_1 + \cdots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$