Examen de rattrapage
Analyse 2
Durée : 2 h

Exercice 1.

1. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle non homogène suivante :
$$(E): \quad ty'(t) - y(t) = t^2 e^t.$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de Bernoulli suivante :
$$(E_{BR}): \quad y' = y + t^2 y^2$$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de Riccati suivante :
$$(E_{RI}): \quad y' = -y^2 + y + 4t^2 + 2t + 2,$$
sachant que $y_p = 2t + 1$ est une solution particulière.

Exercice 2.
Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt.$$

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n sont bien définis.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = I_{n+1}$. En déduire la valeur de I_n.
3. Soit $\phi : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$.
4. Montrer que la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
5. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_n - I_n = 0$.
6. Montrer, en utilisant un changement de variables, que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_n = I$.
7. En déduire la valeur de I.

Exercice 3.
Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1 - \sin(n)}{1 + n\sqrt{n}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{e^n - 1}{\sqrt{n}}$.
3. $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$.
4. $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n^2} (\sin(\alpha))^{2n}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \geq n(\ln(n) - 1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k)$.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ converge.

Faites de votre mieux, et bon courage !