Épreuve d'Analyse 1 – Session de rattrapage

► L'évaluation prendra en compte à la fois les résultats obtenus, la rigueur des raisonnements et la qualité rédactionnelle.

⊗ L'usage de tout document ou **appareil électronique** est strictement interdit.

Exercice 1 (3 points)**.**

1. Énoncer la propriété d'Archimède.
2. On considère l'ensemble suivant : $A = \left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
   Montrer que $\max(A) = \frac{3}{2}$ et $\inf(A) = -1$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq E(nx) - n\,E(x) \leq n - 1$.

Exercice 2 (6 points)**.**

Soit p un entier naturel <u>non nul fixé</u>. On considère la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}.$$

1. Vérifier que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.
2. On suppose dans cette question que $p = 1$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} - a_n \geq \frac{1}{2}$.
   b) En déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ n'est pas majorée. Conclure sur la nature de $(a_n)_{n\geq 1}$.
3. On suppose maintenant que $p \geq 2$ et on considère la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ définie par :
   $$b_n = a_n + \frac{1}{n^{p-1}}.$$
   a) Montrer que la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.
   b) En déduire que $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
   c) Conclure sur la nature de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 3 (6 points)**.**

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

1. À l'aide du théorème des accroissements finis (TAF), montrer que : $\dfrac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \dfrac{b-a}{a}$.
2. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et deux fois dérivable sur $]0,1[$, telle que
   $$f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f'(0) > 0 \quad \text{et} \quad f'(1) < 0.$$
   De plus, on suppose que $\forall x \in]0,1[, \quad f''(x) < 0$.
   a) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que, pour tout $x \in [0,\alpha[$, on ait $f'(x) > 0$.
   b) Montrer que $\forall x \in]0,\alpha[: \quad f(x) > 0$.
   c) On suppose qu'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $f(\beta) = 0$. Montrer qu'il existe $c_1 \in]0,\beta[$ et $c_2 \in]\beta,1[$ tels que
   $$f'(c_1) = f'(c_2) = 0,$$
   puis en déduire une contradiction.
   d) Déterminer le signe de f sur $]0,1[$.
3. On considère la fonction g définie par :
   $$g(x) = \ln(xa + (1-x)b) - x\ln(a) - (1-x)\ln(b).$$
   Montrer que g vérifie les hypothèses de la question 2 (en particulier, on vérifiera que g est bien définie sur $[0,1]$). En déduire que, pour tout $x \in]0,1[$,
   $$\ln(xa + (1-x)b) > x\ln(a) + (1-x)\ln(b).$$

Exercice 4 (5 points)**.**

1. Calculer les développements limités suivants :
   a) $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0.
   b) $x \longmapsto \cos(x)\ln(x+1)$ à l'ordre 4 en 0.
   c) $x \longmapsto \dfrac{e^x}{\cos(x)}$ à l'ordre 3 en 0.
   d) $x \longmapsto \ln(1+e^x)$ à l'ordre 2 en 1.
2. En utilisant les développements limités, montrer que :
   $$e^x - \sqrt{1+2x} \underset{0}{\sim} x^2.$$
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.
   a) Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
   b) En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.
   c) Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.