Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques
Fès

Examen normal
Analyse 2
Durée : 2 h

Année Universitaire 2024/2025
Parcours : TC GESE & MSD
Responsable : M. El Ahmadi

Exercice 1.

1. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle non homogène suivante :
$$(E): \quad ty'(t) - y(t) = t^2 e^t.$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de Bernoulli suivante :
$$(E_{BR}): \quad y' = y + t^2 y^2$$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de Riccati suivante :
$$(E_{RI}): \quad y' = -y^2 + y + 4t^2 + 2t + 2,$$
sachant que $y_p = 2t+1$ est une solution particulière.

Exercice 2.

Le but de cet exercice est de calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt = 0.$$
2. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a
$$A_n(t) = \frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}.$$
3. (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,
$$\int_0^{\pi} \left(at^2 + bt\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$
   (b) Vérifier alors que
$$\int_0^{\pi} \left(at^2 + bt\right) A_n(t) dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$
4. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$.

1. Montrer que I_n existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
   (b) Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$.
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \sqrt{n} I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1} I_n$.
   (a) Montrer que les suites $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$.
5. (a) Calculer I_n en fonction de n.
   (b) On utilisant la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$, Montrer que
$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}.$$
   (c) Déterminer la valeur de α.