Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques
Fès

Durée : 2 h

Année Universitaire 2025/2026
Parcours : TC GMSI
Responsable : M. El Ahmadi

Epreuve d'Analyse 1– Session Normale

- ► Les quatre exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- ► L'évaluation prendra en compte à la fois les résultats obtenus, la rigueur des raisonnements et la qualité rédactionnelle.
- ⊗ L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1 (4 points)**.**

1. Énoncer la caractérisation de la borne inférieure d'une partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$.
2. Soient A et B deux parties **non vides** et **bornées** de $\mathbb{R}$. On définit :

$$-A = \{-a \mid a \in A\}, \quad A_+ = \{a \in A \mid a \geq 0\} \quad \text{et} \quad AB = \{a \times b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

   (a) Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
   (b) Montrer que si A_+ et B_+ sont non vides, alors : $\sup(A_+B_+) = \sup(A_+) \times \sup(B_+)$.
   (c) Montrer par un contre-exemple que, sans hypothèse supplémentaire, on n'a pas en général :

$$\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B).$$

3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$, où $E(\cdot)$ désigne la partie entière.

Exercice 2 (5 points)**.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle telle qu'il existe $q \in]0,1[$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leq q^n.$$

1. Montrer que (u_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, puis déduire sa nature.
2. On considère maintenant la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.
   (c) Montrer par l'absurde que la suite (u_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 (5 points)**.**

1. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) - f(1) = -1$.
   Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que :

$$\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2+1)^2}.$$

   <u>Indication</u> : on pourra considérer la fonction auxiliaire g définie par : $g(x) = f(x) + \frac{2}{x^2+1}$.

2. En utilisant le théorème des accroissements finis (TAF), démontrer les deux inégalités suivantes :
   (a) $\forall x > 0, \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.
   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
   (a) Montrer que f est uniformément continue sur tout segment $[a,b]$ tel que $0 < a < b$.
   (b) Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

Exercice 4 (6 points)**.**

1. À l'aide de la formule de Taylor–Young, déterminer les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions :

$$x \longmapsto \sqrt{1+x} \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \ln(1+x).$$

2. On considère la fonction f définie sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\ln(\sqrt{1+x}) - \dfrac{x}{2}}{\sin^2(x)}.$$

   (a) Établir les développements limités suivants en 0 à l'ordre 4 :

$$\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \quad \text{et} \quad \ln(\sqrt{1+x}) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

   (b) En déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
   (c) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, que l'on notera $\tilde{f}$, et préciser la valeur de $\tilde{f}(0)$.
   (d) Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0.
   (e) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de $\tilde{f}$ au point d'abscisse 0, puis étudier la position relative de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

`Rappelez-vous que :`

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{24}x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0).$$