UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE FÈS

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques de Fès
Département de Mathématiques

Cours d'Analyse II

Prof. : Mahmoud El Ahmadi

Année universitaire 2025–2026

0 Table des matières

1 Intégrale de Riemann

La théorie de l'intégration trouve son origine dans la nécessité pratique de calculer des aires et des volumes. Elle est étroitement liée à la notion de mesure et repose sur le principe fondamental suivant : l'intégrale d'une fonction constante sur un ensemble est égale au produit de cette constante par la mesure de cet ensemble.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'intégrale de fonctions définies sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Bien qu'il existe différentes approches théoriques de l'intégration, nous nous limiterons ici à celle de Riemann, dont le cadre est largement suffisant pour les applications usuelles.

I Intégrale d'une fonction en escalier

Sauf indication contraire, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

1 Fonction en escalier

Définition 1.1

On appelle **subdivision** de l'intervalle $[a,b]$ toute famille finie $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de réels vérifiant les conditions suivantes :

1. pour tout $i \in \{0,\dots,n\}$, $x_i \in [a,b]$;
2. $x_0 = a$ et $x_n = b$;
3. pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a $x_{i-1} < x_i$.

On appelle **pas de la subdivision** le réel :

$$h = \max_{1\leq i\leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

◂ **Remarque 1.1.**

1. Une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ de l'intervalle $[a,b]$ comprend $n+1$ points, appelés **nœuds de la subdivision**, et détermine n intervalles non vides $[x_{i-1}, x_i]$ pour $i = 1,\dots,n$.
2. On dit que la subdivision σ de l'intervalle $[a,b]$ est **plus fine** que la subdivision σ' si
$$\sigma' \subset \sigma.$$
Autrement dit, la subdivision σ contient tous les points de σ' ainsi que d'autres points intermédiaires. Par exemple, la subdivision
$$\sigma = (0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2)$$
de l'intervalle $[0,2]$ est plus fine que la subdivision
$$\sigma' = (0,\ 1,\ 2).$$
3. On définit la subdivision $\sigma \cup \sigma'$ comme étant la subdivision constituée de l'ensemble des points de σ et de σ', réordonnés et réindexés de façon à satisfaire les conditions de la définition 1.1.
4. On a toujours
$$\sigma \subset \sigma \cup \sigma' \quad \text{et} \quad \sigma' \subset \sigma \cup \sigma'.$$
Ainsi, la subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que les subdivisions σ et σ'.

Définition 1.2

On appelle **subdivision uniforme** de l'intervalle $[a,b]$ toute famille finie $(x_i)_{0\le i\le n}$ de réels définie par la relation

$$x_i = a + i\,h,$$

où le **pas** h (ou longueur des sous-intervalles) est constant et donné par

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

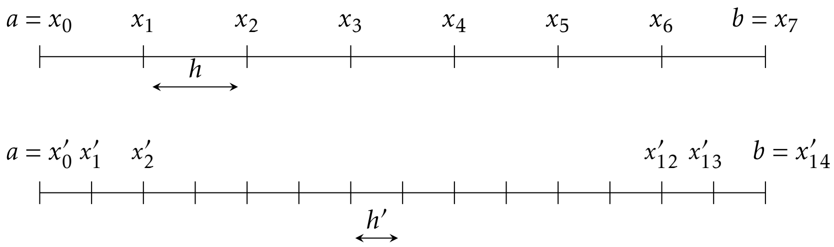

FIGURE 1.1 – Subdivision uniforme $(x_i)_{0\le i\le 7}$ et subdivision plus fine $(x'_i)_{0\le i\le 14}$ de $[a,b]$.

On rappelle que pour un ensemble A, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ est celle qui indique si x est dans A ou non.

Définition 1.3

On appelle **fonction en escalier** sur $[a,b]$ toute fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\le i\le n}$ de $[a,b]$ avec f constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$; c'est-à-dire, il existe des constantes réelles m_i, $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ telles que :

$$\forall x \in]x_i, x_{i+1}[: \quad f(x) = m_i.$$

La fonction f s'écrit alors :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \mathbf{1}_{]x_i,x_{i+1}[}(x). \tag{1.1}$$

◂ **Remarque 1.2.**

1. Une telle subdivision de $[a,b]$ est appelée subdivision adaptée à la fonction en escalier f.
2. L'image d'une fonction en escalier sur $[a,b]$ est un ensemble fini (une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs). Une fonction en escalier est donc bornée et ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité.
3. On désignera par $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

▹ **Exemple 1.1.**

1. Toute fonction constante sur $[a,b]$ est en escalier sur $[a,b]$.
2. La fonction $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

   est une fonction en escalier sur $[0,2]$.
3. La fonction partie entière E est une fonction en escalier, voir la figure 1.2 ci-dessous. Sur l'intervalle $[-2,2]$, la subdivision $\sigma = (-2,-1,0,1,2)$ est une subdivision uniforme adaptée à la fonction partie entière E.

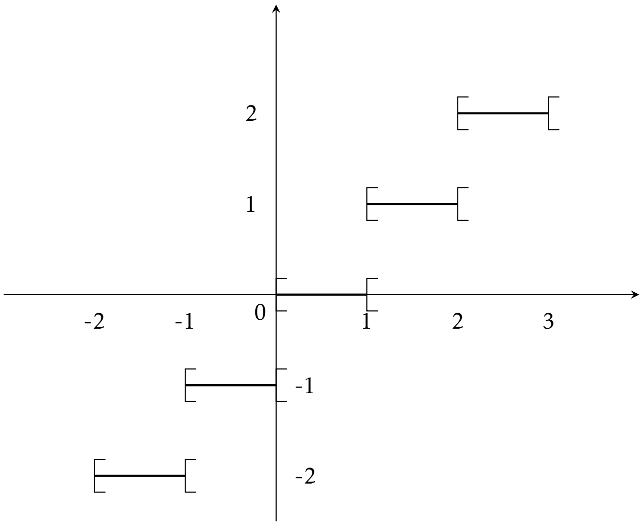

Figure 1.2 – Représentation graphique de la fonction partie entière.

Proposition 1.1

L'ensemble $\mathcal{E}([a,b])$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1.4

Soient f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ adaptée à f. Pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, on désigne par λ_i la valeur prise par f sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. On appelle intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$ le réel

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\,\lambda_i.$$

◂ **Remarque 1.3.**

On peut montrer que la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est indépendante du choix de la subdivision adaptée σ. Cela justifie l'absence de référence à σ dans la notation de l'intégrale.

▹ **Exemple 1.2.**

Considérons la fonction partie entière E sur l'intervalle $[-2,2]$ et la subdivision adaptée $\sigma_1 = (-2,-1,0,1,2)$, qui est une subdivision uniforme de pas $h = 1$ (voir la figure 1.3). Sur chaque intervalle ouvert, la fonction prend les valeurs constantes suivantes :

— Sur $]-2,-1[$, $\lambda_1 = -2$;
— Sur $]-1,0[$, $\lambda_2 = -1$;
— Sur $]0,1[$, $\lambda_3 = 0$;
— Sur $]1,2[$, $\lambda_4 = 1$.

L'intégrale de la fonction partie entière sur $[-2,2]$ vaut donc :

$$\int_{-2}^{2} E(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{4}(x_i - x_{i-1})\lambda_i = h\sum_{i=1}^{4}\lambda_i = -2 + (-1) + 0 + 1 = -2.$$

Si l'on considère une subdivision non uniforme $\sigma_2 = \left(-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{4}, 0, 1, \frac{7}{4}, 2\right)$, on obtient le même résultat :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} E(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{7}(x_i - x_{i-1})\lambda_i \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\times(-2) + \frac{1}{2}\times(-2)}_{E(x)=-2} + \underbrace{\frac{3}{4}\times(-1) + \frac{1}{4}\times(-1)}_{E(x)=-1} + \underbrace{1\times 0}_{E(x)=0} + \underbrace{\frac{3}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times 1}_{E(x)=1} \\ &= -1 - 1 - 0,75 - 0,25 + 0 + 0,75 + 0,25 = -2.\end{aligned}$$

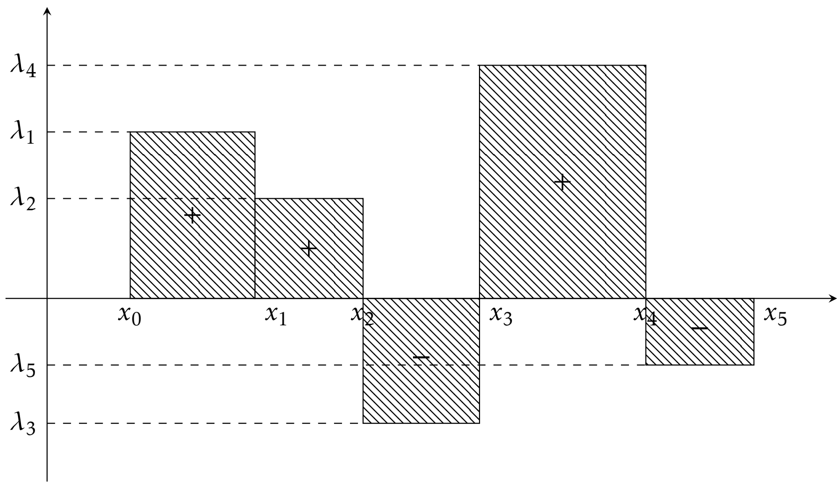

Figure 1.3 – Le nombre réel $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ représente la somme des aires algébriques des rectangles hachurés.

Proposition 1.2

Étant données deux fonctions f et g en escalier sur $[a,b]$, on a les propriétés suivantes :

1. $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.
2. Si f est positive alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
3. Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$
4. Pour tout $c \in]a,b[$ la fonction f est une fonction en escalier sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$; de plus
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{(relation de Chasles)}\,.$$
5. Si $f \leqslant g$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Preuve.

1. Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ adaptée à f. Pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, soit λ_i la valeur prise par f sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. En utilisant la

première inégalité triangulaire, on obtient

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\,\lambda_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\,|\lambda_i| = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

La première propriété est démontrée.

2. La deuxième propriété résulte de la première propriété, car $|f| = f$ si f est positive.
3. Pour vérifier la troisième propriété, il suffit de considérer pour la fonction $\alpha f + \beta g$, la subdivision obtenue par réunion de deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées aux fonctions f et g.
4. Soit f une fonction en escalier définie sur $[a,b]$ avec une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que f est constante sur chaque sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i[$. Supposons que $c \in \,]a,b[$. Si c appartient à un des sous-intervalles $[x_{k-1}, x_k[$, on peut ajouter c à la subdivision précédente pour obtenir une nouvelle subdivision $a = x_0 < \cdots < x_{k-1} < c < x_k < \cdots < x_n = b$. Alors on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x &= \left(\sum_{i=1}^{k-1} c_i\,(x_i - x_{i-1}) + c_k\,(c - x_{k-1})\right) + \left(c_k\,(x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1})\right)\\ &= \sum_{i=1}^{k-1} c_i\,(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1}) + c_k(x_k - x_{k-1}\\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1})\\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

où c_k est la valeur constante de f sur $[x_{k-1}, x_k[$.
5. On obtient alors la cinquième propriété en appliquant la deuxième propriété à la fonction $g - f$.

■

II Intégrale de Riemann

Nous allons étendre la notion d'intégrale à une classe de fonctions beaucoup plus générale que celle des fonctions en escalier. Cette extension sera guidée par le souci de conserver avec ces nouvelles fonctions les propriétés de l'intégrale pour les fonctions en escalier énoncées à la proposition 1.2.

1 Sommes de Darboux

On se donne un intervalle fermé et borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle **bornée** sur $[a,b]$. Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

et l'on définit le pas de la subdivision σ par

$$h(\sigma) = \max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1}).$$

Les bornes inférieure m_i et supérieure M_i sont bien définies, puisque la fonction f est supposée bornée sur $[a,b]$, et donc, a fortiori, sur chacun des sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$.

Définition 1.5

1. On appelle **somme de Darboux inférieure** associée à la fonction f et à la subdivision σ la somme

$$s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}).$$

2. On appelle **somme de Darboux supérieure** associée à la fonction f et à la subdivision σ la somme

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}).$$

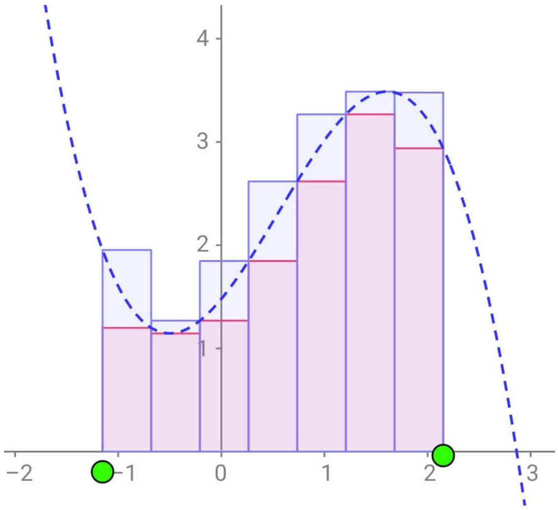

FIGURE 1.4 – Les sommes de Darboux inférieure et supérieure.

Proposition 1.3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait

$$m \le f(x) \le M.$$

Alors, pour toute subdivision σ de $[a,b]$, on a

$$m(b-a) \le s(f,\sigma) \le S(f,\sigma) \le M(b-a).$$

Preuve.
Soit σ une subdivision de $[a,b]$. Notons que $m \le m_i$ et $M_i \le M$ pour tout i. De plus, $m_i \le M_i$ pour tout i. Par conséquent,

$$\begin{aligned} m(b-a) = m\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} m\,(x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} M\,(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\leq M\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = M(b-a).$$

■

Proposition 1.4

1. Si la subdivision σ est plus fine que la subdivision σ' (c'est-à-dire $\sigma' \subset \sigma$), alors on a
$$s(f,\sigma') \leq s(f,\sigma) \quad \text{et} \quad S(f,\sigma') \geq S(f,\sigma).$$
2. Pour toutes subdivisions σ et σ', on a
$$s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma').$$

Preuve.

1. Il suffit de montrer le résultat dans le cas où σ est obtenue en ajoutant un point y à $\sigma' = (a = x_0 < \cdots < x_n = b)$, et l'on suppose que $y \in [x_{i-1}, x_i]$ pour un certain $1 \leq i \leq n$.
Posons
$$\ell_1 = \inf_{x\in[x_{i-1},y]} f(x) \quad \text{et} \quad \ell_2 = \inf_{x\in[y,x_i]} f(x).$$
On a évidemment $m_i \leq \ell_1$ et $m_i \leq \ell_2$, et l'on peut vérifier que $m_i = \min(\ell_1, \ell_2)$. Ainsi,
$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \ell_1(y - x_{i-1}) + \ell_2(x_i - y).$$
Les autres termes des deux sommes étant deux à deux identiques, on obtient finalement
$$s(f,\sigma') \leq s(f,\sigma).$$
On vérifie de manière analogue que
$$S(f,\sigma') \geq S(f,\sigma).$$
2. En vertu de la remarque 1.1, on a
$$s(f,\sigma') \leq s(f,\sigma\cup\sigma') \leq S(f,\sigma\cup\sigma') \leq S(f,\sigma).$$

■

Définition 1.6

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Les ensembles des sommes de Darboux inférieures et supérieures étant bornés, on définit :

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\Big\{s(f,\sigma) \mid \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\Big\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\Big\{S(f,\sigma) \mid \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\Big\}.$$

La quantité $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ est appelée **intégrale de Darboux inférieure** de f sur $[a,b]$, et $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ est appelée **intégrale de Darboux supérieure** de f sur $[a,b]$.

◂ **Remarque 1.4.**

1. Pour simplifier l'écriture, on écrit souvent
$$\underline{\int_a^b} f := \underline{\int_a^b} f(x)dx \quad \text{et} \quad \overline{\int_a^b} f := \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

2. Il est simple de vérifier que $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Proposition 1.5

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Alors on a

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Preuve.
La preuve est immédiate. ■

2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Nous pouvons enfin définir l'intégrale de Riemann. Cependant, celle-ci n'est définie que pour une certaine classe de fonctions, appelées **fonctions intégrables au sens de Riemann**. On suppose toujours que la fonction réelle f est bornée sur $[a,b]$.

Définition 1.7

La fonction f est dite **intégrable au sens de Riemann** sur l'intervalle $[a,b]$ lorsque

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Son intégrale sur $[a,b]$ est alors cette valeur commune, notée

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

▹ **Exemple 1.3.**
La fonction constante égale à λ sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, et on a

$$\int_a^b \lambda\,dx = \lambda(b-a).$$

En effet, pour toute subdivision σ de $[a,b]$, on a

$$\underline{\int_a^b} \lambda\,dx = \lambda(b-a) = \overline{\int_a^b} \lambda\,dx.$$

L'idée derrière la définition des fonctions intégrables est que l'encadrement entre les sommes de Darboux inférieures et supérieures peut être rendu aussi précis que l'on souhaite, ce qui permet de déterminer un réel unique.

Il est alors commode d'utiliser le critère d'intégrabilité suivant :

Proposition 1.6 [Critère de Riemann-intégrabilité]

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie et bornée sur l'intervalle $[a,b]$. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon.$$

Preuve.

★ Supposons que f est intégrable et donnons-nous $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la borne supérieure, il existe une subdivision σ' de $[a,b]$ telle que

$$s(f,\sigma') > \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe une subdivision σ'' telle que

$$S(f,\sigma'') < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En posant $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$, on obtient

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma'') - s(f,\sigma') < \varepsilon.$$

★ Réciproquement, supposons que le critère est vérifié. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc une subdivision σ telle que

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon.$$

Or, comme

$$s(f,\sigma) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S(f,\sigma),$$

on en déduit

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon.$$

Cela devant être vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f,$$

et donc que f est intégrable sur $[a,b]$. ■

▹ **Exemple 1.4.**

Montrons que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ est intégrable sur $[0,b]$ pour tout $b > 0$.
Nous verrons plus tard que les fonctions continues sont intégrables au sens de Riemann.
Soient $\varepsilon > 0$ et $\sigma = (x_i := \frac{ib}{n})_{0\leq i\leq n}$ la subdivision uniforme de l'intervalle $[0,b]$. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b}{n}.$$

Comme f est décroissante sur $[0,b]$, on obtient

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \frac{1}{1+x_i}, \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \frac{1}{1+x_{i-1}}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} S(f,\sigma) - s(f,\sigma) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\frac{(i-1)b}{n}} - \frac{1}{1+\frac{ib}{n}} \right) \\ &= \frac{b}{n} \left(\frac{1}{1+0} - \frac{1}{1+b} \right) \\ &= \frac{b^2}{n(b+1)}. \end{aligned}$$

En choisissant n tel que
$$\frac{b^2}{n(b+1)} < \varepsilon,$$
le critère de Riemann est satisfait. Ainsi, la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[0,b]$.

III Principaux exemples de fonctions Riemann-intégrables

Proposition 1.7

Toute fonction continue sur le segment $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Preuve.
Si f est continue sur $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,b]$. De plus, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$.
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x,y \in [a,b]$, si $|x-y| < \eta$, alors
$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$
Fixons un entier $n > \frac{b-a}{\eta}$ et considérons la subdivision uniforme
$$\sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}, \quad \text{avec } a_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$
Sur chaque sous-intervalle $[a_{i-1}, a_i]$, la fonction f atteint sa borne inférieure m_i et sa borne supérieure M_i, c'est-à-dire
$$m_i = f(x_i), \quad M_i = f(y_i)$$
pour certains $x_i, y_i \in [a_{i-1}, a_i]$.
Comme x_i et y_i appartiennent au même intervalle de longueur $\frac{b-a}{n} < \eta$, on a
$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$
Il s'ensuit que
$$\begin{aligned} S(f,\sigma) - s(f,\sigma) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\frac{b-a}{n} \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon, \end{aligned}$$
et le critère de Riemann est donc vérifié. ■

Proposition 1.8

Toute fonction monotone sur le segment $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Preuve.
Nous traitons ici le cas d'une fonction croissante (non constante).
Tout d'abord, f est bornée sur $[a,b]$, car pour tout $x \in [a,b]$, on a
$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Considérons la subdivision uniforme

$$\sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}, \quad a_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

Puisque f est croissante, la borne supérieure et inférieure de f sur chaque sous-intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ sont

$$m_i = f(a_{i-1}) \quad \text{et} \quad M_i = f(a_i).$$

On obtient alors

$$s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a_{i-1}), \qquad S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a_i),$$

et donc

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) = \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{n}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir un entier

$$n > \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{\varepsilon}$$

pour obtenir

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon.$$

Ainsi, le critère de Riemann est vérifié et f est intégrable sur $[a,b]$. ■

Définition 1.8

On dit qu'une fonction f définie sur $[a,b]$ est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \le i \le n}$ de $[a,b]$ telle que :

1. Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$.
2. Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la fonction f admet une limite à droite en x_i et une limite à gauche en x_{i+1}.

On admet le résultat suivant qui en un certain sens est un peu plus général que celui énoncé à la proposition 1.7 et qui pourrait être démontré selon le même principe en considérant les différents intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ de la subdivision sur lesquels f est continue.

Proposition 1.9

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

◂ **Remarque 1.5.**
Même si l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables semble vaste et inclut les fonctions habituellement manipulées, il ne faut pas pour autant croire que toute fonction est intégrable au sens de Riemann.

Contre-exemple 1.1 (Fonction de Dirichlet)**.**
Soit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Comme les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, pour toute subdivision σ de $[0,1]$, on a

$$s(f,\sigma) = 0 \quad \text{et} \quad S(f,\sigma) = 1.$$

Ainsi,

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f(x)\,dx.$$

Par conséquent, f n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$.

IV Propriétés de l'intégrale de Riemann

Les propriétés énoncées dans la proposition suivante sont admises. Elles s'obtiennent à partir des propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier données à la proposition 1.2 et de la définition de la Riemann-intégrabilité.

Proposition 1.10

Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur l'intervalle $[a,b]$. on a les propriétés suivantes :

1. $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$
2. Si f est positive alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$
3. Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ la fonction $\alpha f+\beta g$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et
$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$
4. Pour tout $c\in]a,b[$ la fonction f est une fonction en escalier sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$; de plus
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{(relation de Chasles)}\,.$$
5. Si $f\leqslant g$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

Proposition 1.11

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et à **valeurs positives**. On a
$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Longleftrightarrow f\equiv 0.$$

Preuve.
$\Rightarrow$) Montrons que si $f\equiv 0$, alors son intégrale sur $[a,b]$ vaut 0. La fonction nulle est triviale en escalier, et la subdivision $\sigma=\{a,b\}$ est adaptée. D'après la définition 1.4, on obtient :
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\times 0 = 0.$$
$\Leftarrow$) Réciproquement, montrons que si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors $f\equiv 0$. Pour cela, on raisonne par contraposée. Supposons que f n'est pas identiquement nulle, c'est-à-dire qu'il existe $x_0\in]a,b[$ tel que $f(x_0)\neq 0$. Comme f est continue sur $[a,b]$, il existe un voisinage de x_0 sur lequel f ne s'annule pas. Autrement dit, il existe $\alpha,\beta\in]a,b[$ avec $\alpha<x_0<\beta$ tels que
$$\forall x\in[\alpha,\beta],\quad f(x)\neq 0.$$
De plus, comme f est positive par hypothèse, on a
$$\exists\eta>0 \quad \text{tel que} \quad \forall x\in[\alpha,\beta],\ f(x)\geq\eta.$$

En utilisant la proposition 1.10, on en déduit :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^\alpha f(x)\,dx}_{\geq 0} + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \underbrace{\int_\beta^b f(x)\,dx}_{\geq 0}$$
$$\geq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta \eta\,dx = \eta(\beta-\alpha) > 0.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$, ce qui achève la preuve. ■

◂ **Remarque 1.6.** ⚠
L'hypothèse « f est positive sur $[a,b]$ » est indispensable. En effet, une fonction impaire, bien qu'elle ne soit pas identiquement nulle, possède une intégrale nulle sur tout intervalle symétrique par rapport à 0.

Proposition 1.12 [Inégalité de Cauchy–Schwarz]

Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$. Alors le produit fg est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et l'on a

$$\left(\int_a^b f(x)\times g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)\times\left(\int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x\right).$$

Preuve.
Considérons la fonction T définie sur $\mathbb{R}$ par

$$T(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

D'après la seconde assertion de la proposition 1.10, la fonction T est positive sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$T(\lambda) = \lambda^2 \underbrace{\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x}_{A} + 2\lambda \underbrace{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}_{B} + \underbrace{\int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x}_{C}.$$

Premier cas : $A \neq 0$. Dans ce cas, T est un polynôme du second degré en λ. Comme $T(\lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce polynôme ne peut avoir que des racines complexes ou une racine réelle double. Son discriminant

$$\Delta = 4B^2 - 4AC$$

est donc négatif ou nul, ce qui entraîne

$$B^2 - AC = \left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - \left(\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t\right) \leq 0.$$

Deuxième cas : $A = 0$. On a alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(\lambda) = 2\lambda B + C \geq 0.$$

Cette inégalité ne peut être satisfaite pour tout λ que si $B = 0$. Dans ce cas, l'inégalité de Cauchy–Schwarz se réduit à l'égalité triviale $0 = 0$. ■

Corollaire 1.1 [Inégalité de Minkowski]

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx} \le \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} + \sqrt{\int_a^b (g(x))^2 dx}.$$

Preuve.
Voir TD. ■

Théorème 1.1 [Inégalité de la moyenne]

Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$. On suppose que g est **positive** sur $[a,b]$ et qu'il existe deux réels m et M tels que

$$m \le f(x) \le M \quad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

Alors

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Preuve.
Comme $m \le f(x) \le M$ pour tout $x \in [a,b]$ et que $g(x) \ge 0$ sur $[a,b]$, on obtient, pour tout $x \in [a,b]$,

$$m\,g(x) \le f(x)g(x) \le M\,g(x).$$

Les fonctions mg, fg et Mg sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$. En intégrant cette double inégalité sur $[a,b]$ et en utilisant la monotonie de l'intégrale de Riemann, on en déduit

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui établit l'inégalité annoncée. ■

Théorème 1.2 [Première formule de la moyenne]

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, avec g **positive** sur $[a,b]$. Alors il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

Preuve. Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, elle y est bornée et atteint ses bornes. Posons

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Premier cas : $g \equiv 0$ sur $[a,b]$. Dans ce cas, les deux membres de (1.3) sont nuls, et l'égalité est vérifiée pour tout $c \in [a,b]$. **Deuxième cas :** $g \not\equiv 0$ sur $[a,b]$. Comme g est continue et positive sur $[a,b]$, on a

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on obtient

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En divisant par $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, il vient

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \in [m, M].$$

Comme f est continue sur $[a,b]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un point $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x},$$

ce qui équivaut à (1.3) et achève la preuve. ■

En appliquant les théorèmes précédents à la fonction g constante égale à 1 sur $[a,b]$, on obtient aussitôt :

Corollaire 1.2

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ telle que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Corollaire 1.3

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Les deux corollaires précédents montrent qu'une fonction intégrable sur $[a,b]$ possède une valeur située entre ses bornes extrêmes et, dans le cas d'une fonction continue, cette valeur est atteinte en un certain point. Cela permet de définir la notion de **valeur moyenne** d'une fonction sur un intervalle.

Définition 1.9

On appelle **valeur moyenne** d'une fonction f sur $[a,b]$, le nombre réel μ_f défini par

$$\mu_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

▹ **Exemple 1.5.**
Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $f(x) = e^x$. Sa valeur moyenne est

$$\mu_f = \frac{1}{1-0} \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1.$$

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[0,1]$ est $\mu_f = e - 1$.

V Sommes de Riemann

Définition 1.10

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle **somme de Riemann** de f relativement à σ, toute somme de la forme :

$$R(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)(a_i - a_{i-1}),$$

avec pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\theta_i \in [a_{i-1}, a_i]$.

◂ **Remarque 1.7.**
Lorsque f est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et que σ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, on a

$$R(f,\sigma) = \int_a^b f(x)dx.$$

Théorème 1.3

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soient $\sigma = (a_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision de $[a,b]$ et $(\theta_i)_{0\le i\le n}$ une famille de points tels que $\theta_i \in [a_{i-1}, a_i]$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(\theta_i) = \int_a^b f(x)dx. \tag{1.4}$$

où h désigne le pas de la subdivision σ.

Preuve.
Puisque f est continue sur le compact $[a,b]$, elle y est uniformément continue d'après le théo rème de Heine, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |x-y| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On suppose que le pas h de la subdivision est tel que $0 < h < \eta$. On a alors $a_i - a_{i-1} < \eta$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. D'où

$$\forall x \in [a_{i-1}, a_i], \quad |x - \theta_i| \le a_i - a_{i-1} < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(\theta_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(\theta_i) \right| &\le \left| \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx - (a_i - a_{i-1}) f(\theta_i) \right] \right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{a_{i-1}}^{a_i} [f(x) - f(\theta_i)]\, dx \right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(x) - f(\theta_i)|\, dx \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} (a_i - a_{i-1}) \le \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui établit (1.4). ■

Corollaire 1.4

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la subdivision régulière

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\},\quad a_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx, \tag{1.5}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx. \tag{1.6}$$

◂ **Remarque 1.8.**

1. La limite (1.5) s'obtient en prenant dans la limite (1.4) $\theta_i = a_i$.
2. La limite (1.6) s'obtient en prenant dans la limite (1.4) $\theta_i = a_{i-1}$.

▸ **Exemple 1.6.**

On veut calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$. Si on pose $f(x) = \sqrt{x}$, on peut réécrire le terme général de la suite comme

$$\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f(1)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1-0}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(0 + i\frac{1-0}{n}\right),$$

et on reconnait une somme de Riemann pour f sur $[0,1]$. Comme f est intégrable sur $[0,1]$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} &= \int_0^1 \sqrt{x}dx \\ &= \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

VI Intégrales indéfinies et primitives

1 Intégrales indéfinies

Définition 1.11

Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,x]$ et la fonction

$$F : x \in [a,b] \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelée **intégrale indéfinie** de f sur $[a,b]$.

◂ **Remarque 1.9.**

D'après la relation de Chasles, pour tout $(x_1, x_2) \in [a,b]^2$, on a

$$\begin{aligned}F(x_2) - F(x_1) &= \int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Proposition 1.13

Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. L'intégrale indéfinie de f sur $[a,b]$ est une fonction continue sur $[a,b]$.

Preuve.
Puisque f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, elle est nécessairement bornée sur $[a,b]$. On pose

$$k = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)|.$$

Par définition de k, on a $|f(x)| \leq k$ pour tout $x \in [a,b]$. Pour tout $(u,v) \in [a,b]^2$, par application du corollaire 1.2, on obtient

$$|F(u) - F(v)| = \left|\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq k|u-v|.$$

Ainsi, la fonction F est k–lipschitzienne sur $[a,b]$. En particulier, F est continue sur $[a,b]$. ■

Proposition 1.14 [Dérivabilité de l'intégrale indéfinie]

Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et soit F son intégrale indéfinie sur $[a,b]$. Si f est continue en un point $x_0 \in]a,b[$, alors F est dérivable en x_0 et

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Preuve.
Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$. Il suffit pour cela d'établir que le taux d'accroissement

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$$

admet pour limite $f(x_0)$ lorsque h tend vers 0.
Autrement dit, il s'agit de montrer que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall h \in \mathbb{R}^*, \quad \Big(|h| \leq \eta \Longrightarrow |\Delta_{x_0}(h) - f(x_0)| \leq \varepsilon\Big).$$

Soit $h > 0$ tel que $[x_0, x_0+h] \subset [a,b]$. En utilisant la remarque 1.9, on a

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, on peut écrire

$$f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}t.$$

Les propriétés de l'intégrale rappelées à la proposition 1.10 permettent alors d'écrire

$$|\Delta_{x_0}(h) - f(x_0)| = \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}\Big(f(t) - f(x_0)\Big)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t.$$

Un raisonnement analogue dans le cas où $h < 0$ conduit à

$$|\Delta_{x_0}(h) - f(x_0)| \leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0-|h|}^{x_0}|f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b], \quad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Supposons que $|h| \leq \eta$. Pour tout t compris entre x_0 et x_0+h, on a alors $|t-x_0| \leq |h| \leq \eta$, d'où $|f(t)-f(x_0)| \leq \varepsilon$. Il vient donc

$$|\Delta_{x_0}(h) - f(x_0)| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon \, \mathrm{d}t = \varepsilon, & \text{si } h > 0, \\ \dfrac{1}{|h|}\displaystyle\int_{x_0-|h|}^{x_0} \varepsilon \, \mathrm{d}t = \varepsilon, & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall h \in \mathbb{R}^*, \quad \Big(|h| \leq \eta \Longrightarrow |\Delta_{x_0}(h) - f(x_0)| \leq \varepsilon\Big),$$

ce qui prouve que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

Corollaire 1.5

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors son intégrale indéfinie F sur $[a,b]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et l'on a

$$\forall x \in [a,b], \ \ F'(x) = f(x).$$

◂ **Remarque 1.10.**
Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et $x_0 \in [a,b]$. D'après le corollaire 1.5, la fonction G définie sur $[a,b]$ par

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

s'écrit

$$G(x) = F(x) - F(x_0),$$

où F désigne l'intégrale indéfinie de f sur $[a,b]$. Ainsi, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et l'on a

$$G'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Dans la pratique, on est souvent amené à considérer des fonctions d'une variable réelle x définies par des intégrales dont les bornes dépendent de x. La proposition suivante précise les propriétés de telles fonctions.

Proposition 1.15 [Intégrale à bornes variables]

Soient f une fonction continue sur un intervalle J, et u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I, telles que $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$.
La fonction

$$\phi : x \in I \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$, on a

$$\phi'(x) = f\big(v(x)\big)v'(x) - f\big(u(x)\big)u'(x).$$

▹ **Exemple 1.7.**
On pose $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et considérons la fonction

$$\phi : x \in I \longmapsto \int_{x}^{2x} \sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction

$$f : t \in \left]-1, +\infty\right[\longmapsto \sqrt{1+t^3}$$

est continue, et les fonctions

$$u : I \to \mathbb{R}, \quad u(x) = x, \qquad v : I \to \mathbb{R}, \quad v(x) = 2x$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient $u(I) \subset]-1, +\infty[$ et $v(I) \subset]-1, +\infty[$.
D'après la proposition précédente, la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in I, \ \ \phi'(x) = 2\sqrt{1+8x^3} - \sqrt{1+x^3}.$$

2 Primitives

Définition 1.12

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction G définie sur I telle que

$$\forall x \in I, \qquad G'(x) = f(x).$$

L'ensemble des primitives de f sur I est noté $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ou simplement $\displaystyle\int f$.

▹ **Exemple 1.8.**

1. La fonction $x \mapsto \ln(x-1)$ est une primitive sur $]1,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$, car

$$\forall x \in]1,+\infty[, \;\; (\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1}.$$

2. La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Théorème 1.4 [Théorème fondamental de l'analyse]

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale indéfinie

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \int_a^t f(x)\,dx$$

est une primitive de f sur $[a,b]$.
De plus, pour toute primitive G de f sur $[a,b]$, il existe une constante réelle c telle que

$$G = F + c.$$

Preuve.
D'après le corollaire 1.5, puisque f est continue sur $[a,b]$, la fonction F définie par $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et vérifie

$$\forall t \in [a,b], \;\; F'(t) = f(t).$$

D'après la définition 1.12, la fonction F est donc une primitive de f sur $[a,b]$.
Soit maintenant G une primitive de f sur $[a,b]$. On a alors

$$\forall x \in [a,b], \;\; G'(x) = f(x).$$

La fonction G est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Par conséquent,

$$\forall x \in]a,b[, \;\; (G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

La fonction $G-F$ est continue sur $[a,b]$ et de dérivée nulle sur $]a,b[$. Elle est donc constante sur $[a,b]$.
Il existe alors un réel c tel que

$$G = F + c.$$

■

◂ **Remarque 1.11.**

1. On déduit du théorème 1.4 que si f est continue sur $[a,b]$, alors il existe une unique primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a ; il s'agit précisément de l'intégrale indéfinie de f sur $[a,b]$.
   Plus généralement, étant donné un réel $x_0 \in [a,b]$, il existe une unique primitive G de f sur $[a,b]$ qui s'annule en x_0. Cette primitive est donnée par
   $$G : x \in [a,b] \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$
   et correspond au choix de la constante
   $$c = -\int_{a}^{x_0} f(t)\,dt$$
   dans le théorème 1.4.
2. Le résultat précédent reste valable sur un intervalle quelconque. Plus précisément, si f est continue sur un intervalle I et si $x_0 \in I$, alors la fonction
   $$G : x \in I \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$
   est une primitive de f sur I.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème fondamental de l'analyse.

Corollaire 1.6

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Le corollaire suivant fournit une relation fondamentale entre une fonction dérivable et sa dérivée.

Corollaire 1.7

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors pour tout $x \in [a,b]$, on a
$$f(x) = f(a) + \int_{a}^{x} f'(t)\,dt.$$

Proposition 1.16 [Lien entre primitive et intégrale]

Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ admettant une primitive G sur $[a,b]$. Alors
$$\int_{a}^{b} f(t)\,dt = G(b) - G(a).$$
Le réel $G(b) - G(a)$ est souvent noté
$$[G(t)]_a^b.$$

▹ **Exemple 1.9.**
La fonction sin est continue sur $[0,\pi]$ et admet pour primitive sur cet intervalle la fonction
$$G : x \mapsto -\cos(x).$$
Par conséquent,
$$\int_{0}^{\pi} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

Exercice 1.1 ✎

Soit ϕ la fonction définie par $\phi(x) = \displaystyle\int_{1}^{1+x^2} \ln(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer ϕ' sans expliciter ϕ.
2. Montrer qu'une primitive de la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$ est $x \mapsto x\ln(x)-x$.
3. En déduire l'expression de ϕ puis retrouver l'expression de ϕ' obtenue à la question précédente.

3 Méthodes d'intégration classiques

Utilisation des primitives usuelles

On rappelle que si f est continue sur un intervalle I, alors elle admet une primitive F sur cet intervalle. Pour tout intervalle $[a,b]\subset I$, on a la formule

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b)-F(a).$$

Liste des primitives usuelles :

Fonction	Primitive	Domaine de validité
$x \mapsto u'(x)(u(x))^n, \quad n\in\mathbb{N}$	$x\mapsto \frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}$	selon D_u
$x\mapsto \frac{u'(x)}{(u(x))^n}, \quad n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	$x\mapsto -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(u(x))^{n-1}}$	$\{x\in D_u : u(x)\neq 0\}$
$x\mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$	$x\mapsto \ln(\lvert u(x)\rvert)$	$\{x\in D_u : u(x)\neq 0\}$
$x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x\mapsto e^{u(x)}$	selon D_u
$x\mapsto e^{\alpha x}, \quad \alpha\in\mathbb{R}^*$	$x\mapsto \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto \ln(x)$	$x\mapsto x\ln(x)-x$	$]0,+\infty[$
$x\mapsto \cos(x)$	$x\mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto \sin(x)$	$x\mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto \tan(x)$	$x\mapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[,\ k\in\mathbb{Z}$
$x\mapsto \cosh(x)$	$x\mapsto \sinh(x)$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto \sinh(x)$	$x\mapsto \cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto \tanh(x)$	$x\mapsto \ln(\cosh(x))$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto \frac{1}{x}$	$x\mapsto \ln(\lvert x\rvert)$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$x\mapsto x^n, \quad n\in\mathbb{N}$	$x\mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto \frac{1}{x^n}, \quad n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	$x\mapsto -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$x\mapsto x^\alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$x\mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0,+\infty[$
$x\mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x\mapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\mapsto \arcsin(x)$ ou $-\arccos(x)$	$]-1,1[$

Exercice 1.2 ✎
Calculer les intégrales suivantes :

1. $A=\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln t)^2}{t}dt.$
2. $B=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t+1}{e^t+t}dt.$
3. $C=\displaystyle\int_0^2 (2t+1)e^{t^2+t+2}dt.$
4. $D=\displaystyle\int_{\frac{3}{\pi}}^{\frac{4}{\pi}} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt.$
5. $E=\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^3(3x)}{\cos^2(3x)}dt.$
6. $F=\displaystyle\int_0^2 \frac{t}{t+1}dt.$
7. $G=\displaystyle\int_0^2 \left|t^2-t\right|dt.$
8. $H=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)dt.$
9. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(t)dt.$

Intégration par parties

Théorème 1.5 [Formule d'intégration par parties]

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors on a :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx,$$

où l'on rappelle que $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Preuve.
Puisque les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, leur produit uv est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. D'après la règle de dérivation d'un produit, on a pour tout $x \in [a,b]$:

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Les fonctions $u'v$ et uv' étant continues sur $[a,b]$, on peut intégrer cette égalité. Par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, l'intégrale de la dérivée de uv est donnée par :

$$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b.$$

On en déduit donc l'égalité :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

En isolant le terme souhaité, on obtient la formule d'intégration par parties. ■

▹ **Exemple 1.10.**
Calculons $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,dx$.
On pose

$$u(x) = \ln(x), \quad v'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = x.$$

Puisque u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,e]$, la formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln(x)\,dx &= [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= e - \int_1^e 1\,dx\\ &= e - e + 1\\ &= 1.\end{aligned}$$

Exercice 1.3 ✎
En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \displaystyle\int_1^e t^n \ln(t)\,dt, \quad n \in \mathbb{N}^*.$
2. $B = \displaystyle\int_0^1 t^3 e^{t^2}\,dt.$
3. $C = \displaystyle\int_0^\pi e^t \cos(2t)\,dt.$
4. $D = \displaystyle\int_1^e t\ln^2(t)\,dt.$

Intégration par changement de variables

Théorème 1.6 [Changement de variable]

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, telle que

$$\varphi(\alpha) = a \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) = b.$$

Alors on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

La transformation $x = \varphi(t)$ est appelée *changement de variable.*

Preuve.
Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $F \circ \varphi$ est dérivable sur $[\alpha,\beta]$ et l'on a

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)'(t)\,dt = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha).$$

En utilisant les conditions aux bornes,

$$(F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

■

◂ **Remarque 1.12.**

1. On doit effectuer les trois substitutions suivantes :
   (a) $x = \varphi(t)$.
   (b) $dx = \varphi'(t)dt$.
   (c) On change les bornes d'intégration.
2. Si F est une primitive de f alors

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C, \quad C \in R$$

▹ **Exemple 1.11.**
Calculons

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} 2t\cos(t^2)\,dt.$$

On pose le changement de variable

$$x = \varphi(t) = t^2, \qquad \varphi'(t) = 2t.$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, \sqrt{2\pi}]$, avec

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\sqrt{2\pi}) = 2\pi.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} 2t\cos(t^2)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0.$$

Proposition 1.17

Soit $a > 0$ et soit f une fonction continue sur $[-a, a]$.

1. Si f est **paire**, alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt.$$
2. Si f est **impaire**, alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$$

▹ **Exemple 1.12.**

1. Puisque la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^t - e^{-t}}{\ln(1+t^2)}$ est une fonction impaire, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^t - e^{-t}}{\ln(1+t^2)}dt = 0$.
2. Puisque la fonction $t \longmapsto |t|$ est une fonction paire, alors $\displaystyle\int_{-2}^{2} |t|dt = 2\int_{0}^{2} t\,dt = 2$.

4 Calculs explicites d'intégrales et de primitives

Intégrales de fonctions rationnelles

Pour intégrer une fonction rationnelle de la forme $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, on procède à une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, puis on intègre chaque terme obtenu ; c'est à dire la partie entière, les éléments simples de première espèce et les éléments simples de seconde espèce suivants :

1. Une primitive de la partie entière s'obtient sans difficulté.
2. Un élément simple de première espèce est de la forme $u(x) = \frac{a}{(x-b)^n}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une primitive de u est donnée par :
$$\int \frac{a}{(x-b)^n}dx = \begin{cases} \frac{-a}{n-1}\frac{1}{(x-b)^{n-1}} + \text{cte} & \text{si } n \neq 1, \\ a\ln(|x-b|) + \text{cte} & \text{si } n = 1. \end{cases}$$
3. Un élément simple de seconde espèce est de la forme $v(x) = \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta, b, c) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\Delta = b^2 - 4c < 0$. On écrit $x^2 + bx + c$ sous la forme canonique $(x-p)^2 + q^2$ $(q \neq 0)$ et on fait le changement de variable $x = p + qt$. On obtient
$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^n}dx = \alpha' \int \frac{t}{(t^2+1)^n}dt + \beta' \int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt.$$
On pose
$$I_n = \int \frac{t}{(t^2+1)^n}dt \quad \text{et} \quad J_n = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt.$$
On obtient immédiatement
$$I_n = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^n}dt = \begin{cases} \frac{-1}{2(n-1)\left(t^2+1\right)^{n-1}} + \text{cte} & \text{si } n \neq 1, \\ \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + \text{cte} & \text{si } n = 1. \end{cases}$$
La fonction J_n est calculée par la formule de récurrence suivante obtenue par primitivation par parties.
★ Pour $n = 1$, on a $J_1 = \int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t + \text{cte}$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
J_n &= \int \frac{1}{(t^2+1)^n} dt \\
&= \int \frac{1}{(t^2+1)^n} (t)' dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}} dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \left(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{n+1}} dt - \int \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}} dt \right) \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n (J_n - J_{n+1}).
\end{aligned}$$

Donc,

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n + \frac{1}{2n} \frac{t}{(t^2+1)^n}.$$

Intégrales de fractions rationnelles en $\exp$

Soit R une fonction rationnelle. Pour calculer une intégrale de la forme $\int R(e^x)dx$, on effectue le changement de variable $t = e^x$, ce qui implique $x = \ln(t)$ et $dx = \frac{1}{t}dt$. On a donc

$$\int R(e^x)dx = \int \frac{R(t)}{t} dt.$$

▷ **Exemple 1.13.**
On a $\int_0^1 \frac{e^x - e^{3x}}{1+e^x} dx = \int_1^e \frac{\frac{t-t^3}{1+t}}{t} dt = \ldots.$

Intégrale de la forme $\int R(\cos(x))\sin(x)dx$

Soit R une fonction rationnelle. Pour calculer une intégrale de la forme $\int R(\cos(x))\sin(x)dx$, on effectue le changement de variable $t = \cos(x)$, ce qui implique $dt = -\sin(x)dx$. On a donc

$$\int R(\cos(x))\sin(x)dx = -\int R(t)dt.$$

▷ **Exemple 1.14.**
On a $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)\sin(x)}{\cos^2(x)+\cos(x)+2} dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{t}{t^2+t+2} dt = \ldots.$

Intégrale de la forme $\int R(\sin(x))\cos(x)dx$

Soit R une fonction rationnelle. Pour calculer une intégrale de la forme $\int R(\sin(x))\cos(x)dx$, on effectue le changement de variable $t = \sin(x)$, ce qui implique $dt = \cos(x)dx$. On a donc

$$\int R(\sin(x))\cos(x)dx = \int R(t)dt.$$

▷ **Exemple 1.15.**
On a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+3} dx = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+3} dt = \ldots.$

Intégrale de la forme $\int R(\tan(x))dx$

Soit R une fonction rationnelle. Pour calculer une intégrale de la forme $\int R(\tan(x))dx$, on effectue le changement de variable $t = \tan x$, ce qui implique $x = \arctan(t)$ et $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$. On a donc

$$\int R(\tan(x))dx = \int \frac{R(t)}{1+t^2} dt.$$

▹ **Exemple 1.16.**
On a $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)+1}{\tan^2(x)+1}dx = \int_0^1 \frac{t+1}{(t^2+1)^2}dt = \dots$.

Intégrale de la forme $\int \cos^p(x)\sin^q(x)dx$

Pour calculer une primitive de $\cos^p(x)\sin^q(x)$, on peut effectuer les changements de variables suivants selon la parité de p et q.

1. Si p est impair, on fait le changement de variable $t = \sin(x)$.
2. Si q impair, on fait le changement de variable $t = \cos(x)$.
3. Si p et q sont impairs, on fait le changement de variable $t = \sin(x)$ ou $t = \cos(x)$.
4. Si p et q sont pairs, on pourra linéariser, puis primitiver.

▹ **Exemple 1.17.**
Calculons $I = \int \sin^3(x)\cos^2(x)dx$. On a $\int \sin^3(x)\cos^2(x)dx = \int (1-\cos^2(x))^2\cos^2(x)\sin(x)dx$.
Posons $t = \cos(x) \Longleftrightarrow dt = -\sin(x)dx$. D'où

$$\begin{aligned} I &= -\int (1-t^2)t^2dt \\ &= -\int (t^2-t^4)dt \\ &= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \text{cte}. \end{aligned}$$

Intégration d'une fonction rationnelle en $\sin$ et $\cos$

Pour calculer une intégrale de la forme $\int f(x)dx$ où f est une fraction rationnelle en sin et cos, on effectue le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$. On a alors

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

▹ **Exemple 1.18.**
Calculons $J = \int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx$ avec $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Posons $t = \tan(\frac{x}{2}) \Longleftrightarrow x = 2\arctan(t) \Longleftrightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ avec $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx \\ &= \int \frac{2t}{(1+t^2)(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})}\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{2t}{1+t^2}dt \\ &= \ln(1+t^2) + \text{cte} \\ &= \ln(1+\tan^2(\frac{x}{2})) + \text{cte}. \end{aligned}$$

On peut, dans certains cas, simplifier les calculs de $\int f(x)dx$ où f est une fraction rationnelle en sin et cos par un changement de variable adapté aux propriétés de la fonction f à intégrer. Ces changements de variables sont connues sous le nom de **règles de Bioche**.

1. Si f est impaire, on fait le changement de variable $t = \cos(x)$.
2. Si f vérifie $f(\pi - x) = -f(x)$, on fait le changement de variable $t = \sin(x)$.
3. Si f vérifie $f(\pi + x) = f(x)$, on fait le changement de variable $t = \tan(x)$.

▹ **Exemple 1.19.**
Soit à calculer l'intégrale $K = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx$.

Avec les notations précédentes, on a $f(x) = \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}$ qui vérifie $f(-x) = -f(x)$.
On pose alors $t = \cos(x) \Longleftrightarrow dt = -\sin(x)dx$.
Le calcul donne alors :

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)} dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{(1-\cos^2(x))\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx \\
&= \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{1-t^2}{1+t^2} dt \\
&= -\int_{\sqrt{2}/2}^{1} dt + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt{2}/2).
\end{aligned}$$

2 Intégrales généralisées

Au chapitre précédent nous avons étudié l'intégrale d'une fonction définie sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'intégration d'une fonction définie sur un intervalle I qui n'est pas fermé ou qui n'est pas borné, c'est-à-dire sur un intervalle de l'une des formes suivantes :

1. $I = [a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$.
2. $I =]a, b]$ où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
3. $I =]a, b[$ où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec a < b,.

En d'autres termes, on cherche à intégrer une fonction sur un intervalle non borné ou à intégrer sur un intervalle d'extrémités a et b une fonction non bornée au voisinage de a ou de b. Cette intégrale est qualifiée d'intégrale généralisée ou encore d'intégrale impropre.

I Généralités

Définition 2.1 [Fonction localement intégrable]

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **localement intégrable** (au sens de Riemann) sur I si pour tout $(a, b) \in I^2$, la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

▹ **Exemple 2.1.**
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est localement intégrable sur $I =]0, +\infty[$.

◃ **Remarque 2.1.**
Les résultats que nous avons établis pour l'intégrale de Riemann conduisent aux critères suivants permettant d'établir qu'une fonction est localement intégrable.

1. Toute fonction continue sur I est localement intégrable sur I.
2. Toute fonction continue par morceaux sur I est localement intégrable sur I.
3. Toute fonction monotone sur I est localement intégrable sur I.
4. L'ensemble des fonctions localement intégrables sur un intervalle I donné est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 2.2 [Nature d'une intégrale généralisée]

1. Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$.
   (a) On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est **convergente** si $\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et finie. Cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur $[a, b[$et elle est notée $\int_a^b f(t)dt$.
   (b) On dit que l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est **convergente** si $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et finie. Cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ et elle est notée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$.
2. Soit f une fonction localement intégrable sur $]a, b]$ où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
   (a) On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est **convergente** si $\lim\limits_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$ existe et finie. Cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur $]a, b]$et elle est notée $\int_a^b f(t)dt$.
   (b) On dit que l'intégrale de f sur $]-\infty, b]$ est **convergente** si $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)dt$ existe et finie. Cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur $]-\infty, b]$et elle est notée $\int_{-\infty}^b f(t)dt$.

◃ **Remarque 2.2.**
Dans tous les cas, on dit qu'une intégrale généralisée est divergente si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si la limite n'existe pas ou est égale à $\pm\infty$.

Définition 2.3

Soit f une fonction localement intégrable sur $]a,b[$ où $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $a < b$ et soit $c \in]a,b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ est **convergente** si les 2 intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont **convergentes**. Dans ce cas, on appelle intégrale généralisée de f sur $]a,b[$ le réel noté $\int_a^b f(t)dt$ qui est défini par

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

▹ **Exemple 2.2.**

1. La fonction$f : x \in [1,+\infty[\mapsto \frac{1}{x}$ est continue, donc localement intégrable sur $[1,+\infty[$. On a pour tout $x \in]1,+\infty[$,
$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$
L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ est donc divergente.
2. La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-x}$ est continue, donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty} (1-e^{-x}) = 1.$$
L'intégrale de f sur $[0,+\infty[$ est donc convergente et $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.
3. La fonction $f : x \in]0,1] \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue, donc localement intégrable sur $]0,1]$. Pour tout réel $x \in]0,1]$, on a
$$\lim_{x\to0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{x\to0^+} (2-2\sqrt{x}) = 2.$$
L'intégrale de f sur $]0,1]$ est donc convergente et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2$.
4. La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sin(x)$ est continue, donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. On a pour tout réel $x \in \mathbb{R}++$,
$$\int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^x = 1-\cos(x),$$
et cosinus n'a pas de limite en $+\infty$. L'intégrale de f sur $[0,+\infty[$ est donc divergente.
5. La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue, donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$
L'intégrale de f sur $[0,+\infty[$ est donc convergente et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$. De même, f étant continue sur $]-\infty,0]$, elle est localement intégrable sur $]-\infty,0]$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_-$, on a
$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{x\to-\infty} -\arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$
L'intégrale de f sur $]-\infty,0]$ est convergente et $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt = \pi/2$. On en déduit que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ est convergente et
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \pi$$

◃ **Remarque 2.3.**

1. Il est inexact d'écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)dt$. Si c'était le cas, toute fonction impaire continue sur $\mathbb{R}$ aurait une intégrale convergente égale à zéro.
2. Avant de calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle donné il faut s'assurer que la fonction considérée est bien intégrable sur cet intervalle. Ainsi la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas localement

Riemann-intégrable sur $[-1,1]$. En effet, les intégrales $\int_{-1}^{0} \frac{1}{t} dt$ et $\int_{0}^{1} \frac{1}{t} dt$ sont divergentes. Un calcul sans précaution pourrait conduire à écrire

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{t} dt = [\ln(|t|)]_{-1}^{1} = 0,$$

ce qui est bien sûr inexact.

Proposition 2.1

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ avec b fini.
Si f est prolongeable par continuité en b (on note $\tilde{f}$ le prolongement), alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge et sa valeur est $\int_a^b \tilde{f}(t)dt$.

Preuve.
Soient $F_1 : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ la primitive de f sur $[a,b[$ qui s'annule en a et $F_2 : x \mapsto \int_a^x \tilde{f}(t)dt$ la primitive de $\tilde{f}$ sur $[a,b]$ qui s'annule en a, alors

$$\forall x \in [a,b[: \; F_1(x) = F_2(x).$$

Or F_2 est continue sur $[a,b]$, on déduit que F_2 est le prolongement par continuité de F_1 et on

$$\lim_{x \to b} F_1(x) = F_2(b) = \int_a^b \tilde{f}(t)dt.$$

■

▹ **Exemple 2.3.**
Calculons l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ où f est la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x) = x\ln(x)$. On a f est bien continue sur $]0,1]$. Puisque

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0,$$

alors on peut définir

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et définir l'intégrale de f sur $]0,1]$ comme l'intégrale de $\tilde{f}$ sur $[0,1]$. Puisque $\tilde{f}$ est continue, cette intégrale est bien définie. Or

$$\int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + \text{cte},$$

alors on peut considérer

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

qui est une primitive de $\tilde{f}$ continue sur $[0,1]$. Ainsi, par la proposition ci-dessus, on déduit que

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \widetilde{f}(t)dt = \widetilde{F}(1) - \widetilde{F}(0) = -\frac{1}{4}.$$

Proposition 2.2

Soit f une fonction localement Riemann-intégrable sur $[a,+\infty[$. Si f admet une limite **non nulle** en $+\infty$ alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **diverge**.

◃ **Remarque 2.4.**
La proposition ci-dessus indique que si f est une fonction localement Riemann intégrable sur $[a,+\infty[$ admettant une limite en $+\infty$ alors pour que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge**, il est nécessaire que f tende vers 0 en $+\infty$. La condition n'est bien entendu pas suffisante comme le prouve l'exemple de l'intégrale généralisé $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ qui diverge.

II Propriétés des intégrales généralisées

Par commodité, nous présenterons les propriétés de l'intégrale pour les seuls intervalles de la forme $[a,b[$.

Proposition 2.3 [Linéarité]

Soient $f,g:[a,b[\to\mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables.
Si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont convergentes, alors pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, l'intégrale généralisé $\int_a^b(\alpha f(t)+\beta g(t))dt$ converge également et on a

$$\int_a^b(\alpha f(t)+\beta g(t))dt=\alpha\int_a^b f(t)dt+\beta\int_a^b g(t)dt.$$

Proposition 2.4 [Relation de Chasles]

Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction localement intégrable.
L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si pour tout $c\in]a,b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes. De plus, on a

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt.$$

Proposition 2.5

Soient $f,g:[a,b[\to\mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables.

1. Si $\forall t\in[a,b[:\ f(t)\geq 0$ et $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt\geq 0$.
2. Si $\forall t\in[a,b[:\ f(t)\leq g(t)$ et $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors $\int_a^b f(t)dt\leq\int_a^b g(t)dt$.

III Calcul des intégrales généralisées

1 Intégration par parties

Proposition 2.6

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ telles que la fonction $t\longmapsto u(t)v(t)$ possède une limite à droite en a et une limite à gauche en b. Les deux intégrales généralisées $\int_a^b u(t)v'(t)dt$ et $\int_a^b u'(t)v(t)dt$ sont de même nature. De plus, si elles convergent, on a

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt=\lim_{t\to b^-}u(t)v(t)-\lim_{t\to a^+}u(t)v(t)-\int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

▹ **Exemple 2.4.**
Appliquons la formule d'intégration par parties pour calculer $\int_0^1\ln(t)\,dt$. La fonction $t\mapsto\ln(t)$ est continue sur $]0,1\,]$ donc localement intégrable sur $]0,1]$. Considérons les deux fonctions

$$u:t\in]0,1]\longmapsto\ln(t)\quad\text{et}\quad v':t\in]0,1]\longmapsto 1.$$

On a

$$u':t\in]0,1]\longmapsto\frac{1}{t}\quad\text{et}\quad v:t\in]0,1]\longmapsto t.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et $\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$. De plus, l'intégrale généralisée $\int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ converge puisque
$$\int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1.$$
La formule d'intégration par parties indique que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que
$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t &= u(1)v(1) - \lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) - \int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t\\ &= 0\times 1 - 0 - 1\\ &= -1.\end{aligned}$$

2 Intégration par changement de variable

Proposition 2.7

Soient $(a,b,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^4$, $f :]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $\phi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ est convergente. De plus, lorsque les intégrales généralisées convergent, on a :
$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

▹ **Exemple 2.5.**

Calculons l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x+1)}dx.$

La fonction $f : x \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x+1)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et par conséquent localement intégrable sur cet intervalle.
La fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et à valeur dans $]1,+\infty[$.
En appliquant le changement de variable $t = \sqrt{1+x}$, on a $x = t^2-1$ puis $dx = 2tdt$ et, sous réserve de convergence :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^2(t^2-1)}2t\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$$
La fonction $t\mapsto \frac{1}{t(t+1)}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Soit $A\in[1,+\infty[$, on a
$$\int_1^A \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = [\ln t - \ln(t+1)]_1^A = \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) + \ln 2 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2.$$
On en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$ converge donc que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$ converge [1] par changement de variables et on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = 2\ln 2.$$

3 Intégrales de référence

Proposition 2.8 [Intégrales généralisées de Riemann]

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.
1. L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente $\iff \alpha < 1$.
2. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente $\iff \alpha > 1$.

1. Ne pas oublier qu'il faut prouver la convergence de cette intégrale avant de calculer sa valeur !

Preuve.
Pour tout réel α, la fonction $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et par conséquent localement intégrable sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x \in]0,1[$, la fonction

$$F_\alpha(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

admet une limite lorsque x tend vers 0 si et seulement si $\alpha < 1$. Par ailleurs, pour tout $x \in]1,+\infty[$, la fonction

$$F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.
On notera que quelle que soit la valeur du réel α, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ diverge. ■

Proposition 2.9 [Intégrales généralisées de Bertrand]

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

1. Pour $a \in]1,+\infty[$ fixé, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\beta (\ln(x))^\alpha} \mathrm{d}x$ est **convergente** si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{c} \beta > 1, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \beta = 1, \quad \alpha > 1 \end{array}\right. .$$

2. Pour $a \in]0,1[$ fixé, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{x^\beta |\ln(x)|^\alpha} \mathrm{d}x$ est **convergente** si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{c} \beta < 1, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \beta = 1, \quad \alpha > 1 \end{array}\right. .$$

IV Critères généraux de convergence d'une intégrale généralisée

1 Critères de convergence dans le cas général

Proposition 2.10

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de nombres réels appartenant à $[a,b[$ et convergeant vers b, la suite de terme général $F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)dt$ converge.

Preuve.
On rappelle la définition séquentielle de la limite d'une fonction dans le cas général. La fonction $g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite l en b si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de $[a,b[$ qui converge vers b, la suite $(g(x_n))_n$ converge vers l.
Ainsi, pour démontrer la proposition, il suffit d'appliquer la définition mentionnée ci-dessus à la fonction $F : x \in [a,b[\longmapsto \int_a^x f(t)dt$. ■

Théorème 2.1 [Critère de Cauchy]

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$. L 'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge, si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c \in [a,b[,\ \forall x,y \in [c,b[:\quad \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \varepsilon.$$

2 Critères de convergence pour les fonctions positives

Dans un souci de simplicité nous énonçons les critères de convergence pour des fonctions localement intégrables sur l'intervalle $[a,b[$ et positives. Ces critères pourraient être énoncés pour des fonctions négatives puisque l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^b -f(t)dt$ converge. La condition importante pour utiliser les critères que nous allons présenter, est que la fonction soit de **signe constant** sur l'intervalle d'intégration.

Proposition 2.11

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$ à valeurs positives. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in [a,b[$ on ait $\int_a^x f(t)dt \leq M$.

Preuve.
Selon la définition 2.2, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si la fonction $F : x \in [a,b[\longmapsto \int_a^b f(t)dt$ a une limite à gauche en b. Comme $\forall x \in [a,b[:\ F'(x) = f(x) \geq 0$, alors la fonction F est croissante sur $[a,b[$. Ainsi, selon le théorème de la limite monotone, la fonction F admet une limite finie lorsque $x \to b^-$ si et seulement si F est majorée. ■

Proposition 2.12 [Critère de comparaison]

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a,b[$, **positives** et telles que $f \leq g$.

1. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ **converge** alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **converge**.
2. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **diverge** alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ **diverge**.

▹ **Exemple 2.6.** Pour tour $\alpha > 1$, l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(t)}{t^\alpha}dt$ est divergente. En effet,

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]:\ \frac{1+\cos(t)}{t^\alpha} \geq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Comme l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^\alpha}$ diverge (intégrale de Riemann avec $\alpha > 1$), alors l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(t)}{t^\alpha}dt$ diverge également.

Exercice 2.1 ✎
Etudier la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Proposition 2.13

Soient f et g deux fonction définies sur $[a,b[$, à **valeurs positives**, localement intégrables sur $[a,b[$, telles que

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}.$$

1. Si $l \neq 0$ alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

2. Si $l = 0$ alors l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Longrightarrow$ l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Définition 2.4 [Rappel]

Soient f et g deux fonctions positives définies sur $[a,b[$, telles que g ne s'annule pas au voisinage de b.

1. On dit que la fonction f est **dominée** par la fonction g au voisinage de b, et on note $f \underset{b^-}{=} \bigcirc(g)$, si :
$$\exists \delta,\ \exists C > 0, \forall x \in [b-\delta, b[:\quad f(x) \leq Cg(x).$$
2. On dit que f est **négligeable** devant g à gauche de b, et on note $f \underset{b^-}{=} \circ(g)$, si :
$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$
3. On dit que f est **équivalente** à g, et on note $f \underset{b^-}{\sim} g$, si
$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Corollaire 2.1

Soient f et g deux fonctions localement intégrables et positives sur $[a,b[$.

1. Si $f \underset{b^-}{=} \bigcirc(g)$, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ **converge** $\Longrightarrow$ l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **converge**.
2. Si $f \underset{b^-}{=} \circ(g)$, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ **converge** $\Longrightarrow$ l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **converge**.
3. Si $f \underset{b^-}{\sim} g$, alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont **de même nature**.

▹ **Exemple 2.7.**

Étudions la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^4}dx$.

On sait que $1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, alors $\frac{1-\cos(x)}{x^4} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2x^2}$. Or l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x^2}dx$ est divergente (car $\alpha = 2 > 1$), alors l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^4}dx$ est aussi divergente.

Corollaire 2.2 [Premier critère de Riemann]

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives.

1. S'il existe $\alpha \in]1,+\infty[$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{t^\alpha}$ alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.
2. S'il existe $\alpha \in]-\infty,1]$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{t^\alpha}$ alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Corollaire 2.3 [Second critère de Riemann]

Soit f une fonction localement intégrable sur $]0,a]$ et à valeurs positives.

1. S'il existe $\alpha \in]-\infty,1[$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{C}{t^\alpha}$ alors l'intégrale généralisée $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ converge.
2. S'il existe $\alpha \in [1,+\infty[$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{C}{t^\alpha}$ alors l'intégrale généralisée $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 2.2

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ln(\tan(t))\mathrm{d}t$.
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\mathrm{d}t$.

V Intégrales absolument convergentes

Définition 2.5

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est **absolument convergente** si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.

Proposition 2.14

Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

Preuve.
Supposons que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ soit absolument convergente ce qui signifie que l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge. Elle satisfait par conséquent le critère de Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c \in [a,b[,\ \forall x,y \in [c,b[:\ \left|\int_x^y |f(t)|dt\right| \leq \varepsilon.$$

Or

$$\left|\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^y |f(t)|\mathrm{d}t = \left|\int_x^y |f(t)|\mathrm{d}t\right|,$$

on en déduit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ vérifie elle aussi le critère de Cauchy et par conséquent, qu'il s'agit d'une intégrale généralisée convergente. ■

◃ **Remarque 2.5.**
La réciproque de la proposition est fausse ; une intégrale généralisée peut être convergente sans être absolument convergente. C'est le cas de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$ qui converge mais ne converge pas absolument.

▹ **Exemple 2.8.**
Pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. Étant donné que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge, le critère de comparaison implique que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| dt$ converge également. Par conséquent, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ converge absolument.

VI Semi-convergence

Définition 2.6

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente s'il s'agit d'une intégrale généralisée convergente mais non d'une intégrale généralisée absolument convergente.

◃ **Remarque 2.6.**
Si f est une fonction localement intégrable sur $[a,b[$ de signe **constant** et si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est convergente alors l'intégrale généralisée est absolument convergente. La notion d'intégrale semi-convergente n'a d'intérêt que pour des fonctions qui ne sont pas de signe constant.

Théorème 2.2 [Théorème d'Abel]

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a,+\infty[$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. la fonction f est positive, décroissante sur $[a,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$;
2. il existe une constante $M>$ telle que

$$\forall x \in [a,+\infty[: \quad \left|\int_a^x g(t)dt\right| \leq M;$$

alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

▹ **Exemple 2.9.**
Vérifions que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente. La fonction $t\mapsto \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}$ est prolongeable par continuité en 0, donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $f : t\in[1,+\infty[\mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$; pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a

$$\left|\int_1^x \sin(t)\mathrm{d}t\right| = |\cos(x)-\cos(1)| \leqslant 2.$$

Le théorème d'Abel indique que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente. On en conclut que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Cette intégrale est appelée intégrale de Fresnel et on montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3 Séries numériques

La théorie des séries numériques est l'étude des sommes comportant une infinité dénombrable de nombres réels ou complexes. Plus précisément, étant donné une suite numérique quel sens peut-on attribuer à l'expression $u_0 + u_1 + u_n \ldots$? Le but de ce chapitre est l'étude détaillée de ce problème. Après les définitions fondamentales et quelques résultats préliminaires, nous examinons dans un premier temps les séries à termes positifs, puis nous détaillons les principales règles de convergence dans le cas général, en particulier le critère de Leibniz pour les séries alternées et le critère d'Abel pour les séries semi-convergentes.

I Généralités

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on se propose de donner un sens à la somme $u_0 + u_1 + \ldots$. Il est donc naturel de commencer par former les sommes partielles :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

et d'étudier la limite de la suite numérique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi obtenue.

Définition 3.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle **série de terme général** u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La série de terme général u_n est notée $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou parfois simplement $\sum u_n$.

Le réel $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelé **la somme partielle d'ordre n** de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

◂ **Remarque 3.1.**
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de terme général u_n n'est également définie qu'à partir de n_0, ce que l'on note $\sum_{n\geq n_0} u_n$. La suite des **sommes partielles** est alors $(S_n)_{n\geq n_0}$, avec $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

▹ **Exemple 3.1.**

1. On considère la série $\sum_{n\geq 0} n$. Son terme général est $u_n = n$. Les premières sommes partielles sont :

$$S_0 = u_0 = 0, \quad S_1 = 0+1 = 1, \quad S_2 = 0+1+2 = 3, \quad S_3 = 0+1+2+3 = 6.$$

   De façon générale, on peut montrer, en utilisant la récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**. Son terme général est $u_n = \frac{1}{n}$. Les premières sommes partielles sont :

$$S_1 = u_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$

Il n'existe pas de formule simple pour calculer la somme partielle (S_n) d'ordre n.

Définition 3.2

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série. Soit S_n sa somme partielle d'indice n.

1. Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **convergente**. La limite S de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors appelée la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, et on note :

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

2. Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **divergente**.
3. Déterminer la nature de la série consiste à déterminer si elle est **convergente** ou **divergente**.

◂ **Remarque 3.2.**

1. L'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la série converge ! Alors que l'écriture $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ a toujours un sens, puisqu'elle désigne une suite.
2. Tout comme on ne confond pas la suite $(u_n)_n$, le n-ième terme u_n de cette suite et sa limite éventuelle L, il convient de ne pas confondre la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, la n-ième somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et la somme éventuelle $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série.
3. Les sommes infinies ne se manipulent pas de la même manière que les sommes finies (puisqu'en réalité, ce sont des limites, et il faut donc toujours vérifier la convergence). C'est pourquoi on calcule (presque) toujours les sommes partielles, qui sont des sommes finies, avant de passer à la limite.

▹ **Exemple 3.2.**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 0$. Alors, la somme partielle d'indice n est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 0 = 0.$$

   La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc clairement convergente et sa limite vaut 0. Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 1$. Alors, la somme partielle d'indice n est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

   Puisque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, la série $\sum_{n\geq 0} 1$ diverge également.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = a^n$, où a est un nombre réel ou complexe donné. On sait que si $|a|\neq 1$, alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

d'où l'on déduit que la série géométrique $\sum_{n\geq 0} a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. Sa somme est alors donnée par :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

Définition 3.3

Soit $\sum u_n$ est une série convergente de somme S. Le nombre

$$R_n = S - S_n$$

est appelé le reste d'ordre (ou d'indice) n de la série.

◂ **Remarque 3.3.**
Le reste R_n d'ordre n n'est défini que pour les séries convergentes. Comme, dans ce cas, la suite (S_n) converge vers S, on en déduit que la suite $(R_n)_n$ converge vers 0. On a aussi

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

de sorte que l'égalité $\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, traduisant $S_n + R_n = S$, est pleinement justifiée.

Proposition 3.1

On ne change pas la nature d'une série $\sum u_n$ en modifiant un ensemble fini des termes de la suite (u_n).

Preuve.
Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite, et supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 : \ v_n = u_n.$$

En notant $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : \ U_n - V_n = \sum_{k=0}^{n_0} (u_k - v_k).$$

La différence $U_n - V_n$ étant constante à partir d'un certain rang, la suite (U_n) et convergente si et seulement s'il en est de même de la suite (V_n). En cas de convergence, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \sum_{k=0}^{n_0} u_k - \sum_{k=0}^{n_0} v_k.$$

D'où la proposition. ■

On en déduit que les résultats de ce chapitre, énoncés souvent avec une hypothèse sur le terme général u_n supposée vérifiée pour tout entier n, voient leurs conclusions qui subsistent, avec parfois une légère modification, lorsque u_n ne vérifie l'hypothèse qu'à partir d'un rang n_0.

Définition 3.4

Étant donné deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et un nombre réel ou complexe α, on définit :

1. la série somme comme étant la série de terme général $u_n + v_n$. Cette nouvelle série est notée

$\sum(u_n + v_n)$.

2. la série produit par α de la série $\sum u_n$, la série de terme général αu_n. On la note $\alpha \sum u_n$.

Avec ces deux lois et les propriétés établies pour les suites numériques, on déduit aussitôt le résultat suivant.

Proposition 3.2

Muni des deux opérations définies ci-dessus, l'ensemble des séries numériques est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont l'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel.

◂ **Remarque 3.4.**
La somme d'une série convergente $\sum u_n$ et d'une série divergente $\sum v_n$ est divergente; sinon, la série $\sum v_n = \sum(u_n + v_n) - \sum u_n$ serait convergente. En revanche, on ne peut rien dire a priori de la somme de deux séries divergentes.

Proposition 3.3

Si une série $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve.
Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$, et les suites (S_n) et (S_{n-1}) convergent vers la somme S de la série $\sum u_n$. On en déduit que la suite (u_n) converge et a pour limite 0. ■

◂ **Remarque 3.5.** La condition $u_n \to 0$ est nécessaire pour la convergence de la série $\sum u_n$, mais n'est évidemment pas suffisante. Par exemple, pour

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (n \geq 1),$$

la suite (u_n) converge vers 0 , mais

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc la série $\sum u_n$ diverge !

Définition 3.5

On dit qu'une série $\sum u_n$ **diverge grossièrement** si la suite (u_n) ne tend pas vers 0.

Définition 3.6

On appelle série télescopique associée à une suite (a_n), la série $\sum u_n$ où $u_n = a_n - a_{n-1}$.

Proposition 3.4

Soit $\sum u_n$ une série télescopique associée à une suite $(a_n)_{n\geq 0}$. Alors la série $\sum u_n$ et la suite (a_n) sont de même nature, et en cas de convergence, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0.$$

Preuve.

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0,$$

et on conclut en faisant tendre n vers l'infini. ■

▹ **Exemple 3.3.**
Considérons la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \geq 1.$$

Puisque

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

on en déduit que $\sum u_n$ est une série télescopique. Elle est donc convergente (car $(\frac{1}{n})_n$ est une suite convergente), et de plus, on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

d'où la somme de la série considérée :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Le résultat qui suit est fondamental. Il permet d'établir la convergence (ou la divergence) d'une série sans en connaître a priori la somme.

Théorème 3.1 [Critère de Cauchy]

Une série numérique $\sum u_n$ converge si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, n \geq N : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon.$$

Preuve.
On sait que dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente. Ainsi, la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles converge si et seulement si elle est de Cauchy. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k.$$

■

▹ **Exemple 3.4.**
Considérons la série harmonique, de terme général $\frac{1}{n}$ avec $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Le critère de Cauchy n'est donc pas satisfait, ce qui permet de conclure que la série harmonique diverge.

Définition 3.7

Une série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Le résultat suivant est très important en pratique.

Théorème 3.2

Toute série **absolument convergente** est **convergente**.

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la série $\sum |u_n|$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \ n \geq N : \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \varepsilon.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a alors

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \varepsilon,$$

d'où l'on déduit que la série $\sum u_n$ satisfait au critère de Cauchy, donc converge d'après le théorème 3.2. ■

◂ **Remarque 3.6.**
La réciproque du théorème précédent est fausse. La convergence absolue est une condition suffisante de convergence. Nous verrons des séries qui sont convergentes, sans être absolument convergentes. Considérons par exemple la série de terme général u_n avec

$$u_{2p} = -\frac{1}{p} \quad \text{et} \quad u_{2p-1} = \frac{1}{p} \quad (p \in \mathbb{N}^*).$$

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} u_k = 0 \quad \text{et} \quad S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k = \frac{1}{n+1}.$$

Les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) ayant la même limite (égale à 0), ce qui permet de conclure que la suite (S_n) converge et que sa limite est 0. La série de terme général u_n est donc convergente et de somme égale à 0 . Cependant, cette série n'est pas absolument convergente car

$$\sum_{k=1}^{2n} |u_k| = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et on a vu à l'exemple 3.4 que la série harmonique est divergente.

Définition 3.8

Une série numérique qui converge mais qui ne converge pas absolument est dite **semi-convergente**.

Nous reviendrons plus loin sur ce type important de séries.

II Séries à termes positifs

Dans cette section, nous nous intéressons aux séries $\sum u_n$ à termes réels positifs. Tous les résultats que nous obtiendrons pour de telles séries resteront vrais pour les séries à termes négatifs, il suffit d'adapter les énoncés et les démonstrations en remplaçant croissante par décroissante, majorée par minorée, $+\infty$ par $-\infty$ ...

Proposition 3.5

Une série à termes positifs **converge** si et seulement si la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est **majorée**.
Si la série diverge, alors la suite $(S_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Preuve.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, une suite croissante converge si elle est majorée, sinon elle tend vers $+\infty$. ■

Notation:
Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente, on écrira $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$. Cette notation signifie que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Elle est généralement réservée aux séries divergentes à termes positifs (ou positifs à partir d'un certain rang). De même, pour indiquer que la série de terme général $u_n \geq 0$ converge, on écrit parfois $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$. Nous allons maintenant établir les principaux critères de convergence relatifs aux séries à termes réels positifs.

Théorème 3.3 [Règle de comparaison]

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs** telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors :

1. Si la série $\sum v_n$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n. \tag{3.1}$$

2. Si la série $\sum u_n$ diverge, il en est de même de la série $\sum v_n$.

Preuve.

1. Notons $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ les suites des sommes partielles associées respectivement aux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Par hypothèse, on a $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \leq T_n \tag{3.2}$$

   Comme la suite $(T_n)_n$ est majorée (car convergente), il en est de même de la suite $(S_n)_n$. Donc la série $\sum u_n$ converge. On obtient l'inégalité (3.1) en faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité (3.2).
2. C'est la contraposée de l'assertion 1).

■

▹ **Exemple 3.5.**

1. Pour tout $n \geq 2$, on a $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ est convergente (voir exemple 3.3), la règle de comparaison permet d'en déduire que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente.
2. Pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme la série harmonique est divergente (voir exemple 3.4), on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

◃ **Remarque 3.7.**
Si la majoration $u_n \leq v_n$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang n_0, la règle de comparaison reste valable car la convergence des suites $(S_n)_{n\geq n_0}$ et $(T_n)_{n\geq n_0}$ entraîne celle des suites $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(T_n)_{n\geq 0}$. Cependant, l'inégalité (3.1) peut être fausse.

La règle de comparaison permet d'établir un autre critère important.

Théorème 3.4 [Règle d'équivalence]

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs** telles que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$. Alors

1. Les séries sont de **même nature**.
2. En cas de convergence, les restes sont **équivalents**.

3. En cas de divergence, les sommes partielles sont **équivalentes**.

◂ **Remarque 3.8.**
La règle d'équivalence peut être mise en défaut si les séries ne sont pas à termes positifs. En revanche, la règle reste valable pour les séries $\sum u_n$ à termes négatifs, il suffit en effet de considérer les séries opposées, c'est-à-dire celles de terme général $-u_n$.

Le résultat qui suit traite de séries qui serviront de référence pour appliquer les règles de comparaison et d'équivalence.

Théorème 3.5 [Séries de Riemann]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ **converge** si et seulement si $\alpha > \mathbf{1}$.

Du théorème précédent, on déduit les règles pratiques suivantes qui sont des conséquences faciles du théorème (ou règle) de comparaison.

Corollaire 3.1 [Règle $n^\alpha u_n$]

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs**.

1. Si la suite $(n^\alpha u_n)_n$ converge vers 0 et si $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si la suite $(n^\alpha u_n)_n$ tend vers $+\infty$ et si $\alpha \leq 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve.

1. Puisque la suite $(n^\alpha u_n)_n$ converge vers 0, en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition de la convergence, on trouve un $N \in \mathbb{N}$ tel que $n^\alpha u_n \leq 1$ pour tout $n \geq N$. On en déduit que $u_n \leq n^{-\alpha}$ pour tout $n \geq N$, et comme $\alpha > 1$, la série $\sum n^{-\alpha}$ converge, et on conclut par la règle de comparaison pour séries à termes positifs.
2. Si $(n^\alpha u_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $n^\alpha u_n \geq 1$ pour tout $n \geq N$. On a alors $u_n \geq n^{-\alpha}$ pour tout $n \geq N$, et comme $\alpha < 1$, la série $\sum n^{-\alpha}$ est divergente, et on conclut ici aussi à l'aide de la règle de comparaison.

■

Théorème 3.6 [règle de domination]

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs** telles que $u_n = \bigcirc(v_n)$ quand $n \to +\infty$.
Si la série $\sum v_n$ est **convergente**, alors la série $\sum u_n$ **converge également**. Dans ce cas, les restes respectifs

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \text{et} \quad \rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

satisfont à la relation : $R_n = \bigcirc(\rho_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Preuve.
L'hypothèse $u_n = \bigcirc(v_n)$ peut s'écrire

$$\exists M > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 : \quad 0 \leq u_n \leq M v_n.$$

Si la série $\sum v_n$ converge, il en est de même de $M \sum v_n$, et d'après la règle de comparaison $\sum u_n$ converge.

Si les séries considérées sont convergentes, on a, pour tout $n \geq n_0$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k,$$

c'est-à-dire $R_n = \bigcirc(\rho_n)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. ■

Théorème 3.7

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs** telles que $u_n = \circ(v_n)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
Si la série $\sum v_n$ est convergente, il en est de même de la série $\sum u_n$. Dans ce cas, les restes respectifs

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \text{et} \quad \rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

vérifient : $R_n = o(\rho_n)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n = o(v_n)$ quand $n \longrightarrow +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq \varepsilon v_n$ pour tout $n \geq N$. Puisque $\sum u_n$ converge, on déduit de la règle de comparaison que la série $\sum u_n$ (où $n \geq N$) est convergente. De plus, pour tout $n \geq N$, on a

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k,$$

ce qui montre que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. ■

Théorème 3.8 [Comparaison série-intégrale]

Soient a un nombre réel donné et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **positive** et **décroissante**. Alors la série $\sum f(n)$ (avec $n \geq a$) et l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont de **même nature**. De plus, en cas de convergence, on a l'encadrement suivant :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

Preuve.
• Sans perte de généralité, on peut supposer $a = 0$. La décroissance de f donne pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in [p, p+1] : \quad f(p+1) \leq f(t) \leq f(p).$$

Par intégration de f sur le segment $[p, p+1]$, on en déduit que

$$f(p+1) \leq \int_p^{p+1} f(t)dt \leq f(p).$$

En sommant pour p allant de 0 à n, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} - f(0) \leq \int_0^{n+1} f(t)dt \leq S_n. \tag{3.3}$$

Si la série converge, la suite $(S_n)_n$ est majorée, donc la suite $\left(\int_0^{n+1} f(t)dt\right)_n$ l'est aussi. La fonction f étant positive, $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est majorée, ce qui prouve que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
• Réciproquement, si l'intégrale impropre est convergente de valeur M, on déduit de l'encadrement (3.3) que

$$S_{n+1} \leq \int_0^{n+1} f(t)dt + f(0) \leq M + f(0)$$

La suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est donc bornée, et comme elle est croissante (car la série est à termes positifs), elle est donc convergente. Autrement dit, la série $\sum u_n$ est convergente. ■

▷ **Exemple 3.6.**
Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ converge si et seulement si, $\alpha > 1$.

Proposition 3.6

La série de Bertrand

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

III Règles de Cauchy et de D'Alembert

Théorème 3.9 [Règle de Cauchy]

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels ou complexes. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda$ existe. Alors

1. Si $\lambda < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument, donc **converge**.
2. Si $\lambda > 1$, la série $\sum u_n$ **diverge**.

▷ **Exemple 3.7.**
Pour la série de terme général $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, on a pour tout $n \geq 1$:

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

et pour tout n suffisamment grand :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \implies n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 + \circ(1).$$

Par continuité de l'exponentielle, on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-1}$. Comme $e^{-1} < 1$, on conclut que la série $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge.

Théorème 3.10 [Règle de de D'Alembert]

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels ou complexes. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lambda$ existe. Alors

1. Si $\lambda < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument, donc **converge**.
2. Si $\lambda > 1$, la série $\sum u_n$ **diverge**.

▷ **Exemple 3.8.**
Pour la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = a\frac{n}{n+1}, \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = a.$$

Il en résulte que $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n}$ converge si $a < 1$ et diverge si $a > 1$. Si $a = 1$, on a $u_n = \frac{1}{n}$ et on sait que la série harmonique diverge.

IV Séries semi-convergentes

Définition 3.9

On dit qu'une série est semi-convergente si elle est **convergente** mais **non absolument convergente**.

▹ **Exemple 3.9.**
Nous verrons dans un instant que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais on sait déjà qu'elle n'est pas absolument convergente puisque $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ est la série harmonique.

Définition 3.10

On appelle **série alternée** toute série de terme général $(-1)^n a_n$ où $(a_n)_n$ est une suite réelle de **signe constant**.

À un signe près, une série alternée s'écrit donc $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ où $(a_n)_n$ est une suite à termes positifs. Pour de telles séries, on a le résultat remarquable suivant.

Théorème 3.11 [Critère de Leibniz]

Soit $(a_n)_n$ une suite à **termes positifs**, **décroissante** et **tendant vers 0**. Alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ est **convergente**.
De plus, sa somme S vérifie $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout n, et son reste R_n d'ordre n vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Preuve.
On va montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En effet, puisque la suite (a_n) est décroissante, on a $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ et $S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$.
De plus, $S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n}$ tend vers 0 . Les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) étant adjacentes, elles sont donc convergentes et ont même limite. La série $\sum(-1)^n a_n$ est donc convergente et, pour tout n, on a $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$. On en déduit que

$$
\begin{aligned}
|R_{2n}| &= |S - S_{2n}| \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}, \\
|R_{2n+1}| &= |S - S_{2n+1}| \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}.
\end{aligned}
$$

Donc $|R_n| \leq a_{n+1}$ pour tout entier naturel n. ∎

▹ **Exemple 3.10.**
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1} n^{-\alpha}$ est alternée et la suite de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est décroissante et tend vers 0 . D'après le critère de Leibniz, la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1} n^{-\alpha}$ est donc convergente, et de plus, on a

$$
\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^\alpha} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}.
$$

4 Équations différentielles linéaires

I Définitions et terminologie

Dans l'étude de nombreux problèmes physiques, on est amené à rechercher une fonction inconnue, solution d'une équation reliant cette fonction à ses dérivées successives. Une telle relation, qui lie une fonction d'une variable réelle à ses dérivées, est appelée **équation différentielle**.
Il est d'usage de noter :
• y la fonction inconnue dans l'équation différentielle,
• t la variable réelle dont dépend la solution.
• L'ordre de dérivation le **plus élevé** de la fonction inconnue apparaissant dans l'équation différentielle définit **l'ordre** de l'équation différentielle. D'une manière générale, une équation différentielle d'ordre n est de la forme :

$$(E): \quad F\Big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)\Big) = 0,$$

où F est une application définie sur un sous ensemble de $\mathbb{R}^{n+2}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ avec $p \geq 1$.
• On appelle solution sur l'intervalle I de l'équation différentielle (E) toute fonction ϕ définie sur I, admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n sur I et dont les dérivées successives $\phi', ..., \phi^{(n)}$ vérifient pour tout $t \in I$

$$F\Big(t, \phi(t), \phi'(t), ..., \phi^{(n-1)}(t), \phi^{(n)}(t)\Big) = 0$$

Vocabulaire:

1. La solution générale d'une équation différentielle désigne l'ensemble de toutes ses solutions. Une solution spécifique appartenant à cet ensemble est appelée **solution particulière**.
2. On appelle courbes intégrales d'une équation différentielle les courbes représentatives des solutions de cette équation.
3. On appelle **problème de Cauchy**, le problème constitué par une équation différentielle d'ordre n et de n conditions initiales portant sur la fonction inconnue et ses dérivées.
4. Une équation différentielle est également caractérisée par son caractère linéaire ou non linéaire. L'équation différentielle
$$(E): \quad F\Big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)\Big) = 0,$$
est dite linéaire lorsque pour $t \in I$ fixé, la fonction
$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto F(t, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^p,$$
est une application linéaire. Dans le cas courant où $p = 1$, une équation différentielle linéaire est de la forme
$$c_n(t)y^{(n)}(t) + c_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + c_1(t)y'(t) + c_0(t)y(t) = g(t),$$
où $c_0, \dots, c_n$ et g sont des fonctions réelles d'une variable réelle. Les fonctions $c_0, \dots, c_n$ sont appelées **coefficients** de l'équation différentielle et la fonction g est appelée **second membre** de l'équation différentielle.
5. Une équation différentielle linéaire d'ordre n est dite **normalisée** si $c_n = 1$.

▹ **Exemple 4.1.**

1. Équation d'un circuit RLC série : $L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = V(t)$.
2. Équation de la chute libre : $y''(t) = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = -g(t)$.
3. Masse attachée à un ressort : $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$.

II Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans l'étude théorique des équations différentielles linéaires du premier ordre que nous allons effectuer, nous considérerons des équations différentielles normalisées. Nous nous intéresserons d'abord aux équations différentielles homogènes (c'est-à-dire dont le second membre est nul) puis aux équations différentielles non homogènes.

Définition 4.1

1. On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** une équation de type
$$(E) \quad c_1(t)y'(t) + c_0(t)y(t) = g(t),$$
où c_1, c_0 et g sont trois fonctions continues définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
2. Une fonction f est une **solution** de cette équation sur l'intervalle I si f est définie et dérivable sur I et
$$\forall t \in I, \quad c_1(t)f'(t) + c_0(t)f(t) = g(t).$$

▹ **Exemple 4.2.**

1. L'équation $y' + xy = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre. La fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une solution de cette équations sur $\mathbb{R}$.
2. L'équation $y' + xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.
3. L'équation $y' + xy = 0$ est l'équation différentielle sans second membre associée à la précédente.
4. Les équations $y'^4 - y = x$ et $y'' \times y' - y = 0$ **ne sont pas** des équations différentielles linéaires.

1 Normalisation d'une équation différentielle

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et c_1, c_0, g trois fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction c_1 n'admet qu'un nombre fini de zéros dans I. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E) \quad c_1(t)y'(t) + c_0(t)y(t) = g(t),$$

admet pour forme normalisée l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(\mathrm{E}_N) \quad y'(t) + \frac{c_0(t)}{c_1(t)}y(t) = \frac{g(t)}{c_1(t)}.$$

L'équation différentielle (E) est définie pour tout $t \in I$, alors que l'équation différentielle (E_N) n'est définie que pour les valeurs de t pour lesquelles c_1 ne s'annule pas. Si la fonction c_1 ne s'annule pas sur I, les équations différentielles (E) et (E_N) sont toutes les deux définies sur I et **équivalentes**. Par contre, si la fonction c_1 admet des zéros, l'équation différentielle (E_N) n'est pas définie sur tout l'intervalle I mais sur un sous-ensemble J de I. Remarquons que toute solution de l'équation différentielle (E) est solution de l'équation différentielle (E_N) sur le sous-ensemble J de I où celle-ci est définie. Par contre, une fois obtenues les solutions de l'équation (E_N) sur J, se pose le problème d'établir s'il existe une solution sur I à l'équation différentielle (E).

Pour l'étude qui suit, nous ferons l'hypothèse simplificatrice que la fonction c_1 ne s'annule pas sur I. Cette condition assure que la forme normalisée (E_N) est bien définie et équivalente à (E) sur tout l'intervalle.

2 Équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre

Définition 4.2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a(.)$ une fonction continue sur I.

1. On appelle équation différentielle linéaire homogène du premier ordre une équation différentielle de la forme
$$(E_0) \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0.$$
2. On dit que la fonction ϕ est solution de (E_0) sur l'intervalle I si ϕ est dérivable sur I et si
$$\forall t \in I \quad \phi'(t) + a(t)\phi(t) = 0.$$

◂ **Remarque 4.1.**

1. La fonction nulle ($y \equiv 0$) est solution de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre (E_0).
2. Rappelons que l'ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ des fonction continues sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation différentielle (E_0) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. En effet,
   (a) d'une part, la fonction nulle étant solution l'équation différentielle (E_0), l'ensemble $\mathcal{S}_0$ n'est pas vide ;
   (b) d'autre part, si ϕ_1 et ϕ_2 désignent deux solutions de (E_0) et μ_1 et μ_2 deux réels alors la fonction $\mu_1\phi_1 + \mu_2\phi_2$ est dérivable sur I et on a
   $$(\mu_1\phi_1 + \mu_2\phi_2)' + a(\mu_1\phi_1 + \mu_2\phi_2) = \mu_1(\phi_1' + a\phi_1) + \mu_2(\phi_2' + a\phi_2) = 0,$$
   ce qui indique que $\mu_1\phi_1 + \mu_2\phi_2$ est solution de l'équation différentielle (E_0). Ainsi, toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{S}_0$ appartient à $\mathcal{S}_0$.

Nous allons, dans les deux résultats qui suivent, caractériser l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation différentielle (E_0).

Proposition 4.1

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation différentielle (E_0) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Le théorème suivant explicite les éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$, autrement dit fournit la forme des solutions de l'équation différentielle (E_0).

Théorème 4.1

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation différentielle (E_0) sur I est donné par
$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \in I \mapsto \kappa \mathrm{e}^{-A(t)} \mid \kappa \in \mathbb{R} \right\}$$
où A désigne une primitive de a sur I. Il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

Preuve.
Commençons par remarquer que la fontion a étant continue sur I, elle admet une primitive A sur I. Le fait que pour tout $t \in I$ on ait $e^{-A(t)} \neq 0$ justifie les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
\phi \in \mathcal{S}_0 &\iff \forall t \in I \quad \phi'(t) + a(t)\phi(t) = 0 \\
&\iff \forall t \in I \quad \mathrm{e}^{A(t)}\phi'(t) + a(t)\mathrm{e}^{A(t)}\phi(t) = 0 \\
&\iff \forall t \in I \quad \left(\mathrm{e}^{A(t)}\phi(t)\right)' = 0 \\
&\iff \exists \kappa \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I \quad \mathrm{e}^{A(t)}\phi(t) = \kappa \\
&\iff \exists \kappa \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I \quad \phi(t) = \kappa \mathrm{e}^{-A(t)}.
\end{aligned}$$

On a donc bien $\mathcal{S}_0 = \left\{ t \in I \mapsto \kappa e^{-A(t)} \mid \kappa \in \mathbb{R} \right\}$. ■

▹ **Exemple 4.3.**
Considérons sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène et normalisée :

$$(E): \quad y'(t) + \frac{y(t)}{\tan(t)} = 0$$

La fonction $a : t \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{1}{\tan(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et une de ses primitives est $A : t \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \ln(\sin(t))$. D'après le théorème 4.1 , la solution générale de l'équation différentielle (E) est la fonction

$$t \in]0, \frac{\pi}{2}[\longmapsto \frac{\kappa}{\sin(t)}, \quad \kappa \in \mathbb{R}, \quad \text{car} \quad e^{-\ln(\sin(t))} = \frac{1}{\sin(t)}.$$

Il y a une unique solution qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{4}$. Il s'agit de la fonction

$$t \in]0, \frac{\pi}{2}[\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}\sin(t)}.$$

3 Équations différentielles linéaires non homogènes du premier ordre

Définition 4.3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux fonctions continues sur I.

1. On appelle équation différentielle linéaire non homogène du premier ordre, une équation différentielle de la forme
$$(E) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$
2. On dit que la fonction ϕ est solution de (E) sur l'intervalle I si ϕ est dérivable sur I et si
$$\forall t \in I \quad \phi'(t) + a(t)\phi(t) = b(t).$$
3. On appelle équation différentielle homogène associée à (E) l'équation différentielle $(E_0) \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$.

Rappelons que l'on appelle solution particulière de l'équation différentielle (E), une solution, quelle qu'elle soit, de (E). Cette terminologie s'oppose à celle de solution générale de l'équation différentielle (E) qui désigne l'expression «générale» que prennent toutes les solutions de (E). Le théorème qui suit indique que la solution générale de l'équation différentielle (E) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E) et d'une solution particulière de (E).

Théorème 4.2

Soient ϕ_1 une solution particulière sur I de l'équation différentielle (E) et A une primitive de a sur I. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{ t \in I \mapsto \kappa e^{-A(t)} + \phi_1(t) \mid \kappa \in \mathbb{R} \right\}.$$

Preuve.
Pour $\kappa \in \mathbb{R}$, notons $\phi_{0,\kappa} : t \in I \mapsto \kappa e^{-A(t)}$; il s'agit de la solution générale de l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E). Désignons momentanément par $\mathcal{T}$ l'ensemble $\{t \in I \mapsto \phi_{0,\kappa}(t) + \phi_1(t) \mid \kappa \in \mathbb{R}\}$. Démontrer le théorème 4.2 revient à établir que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle (E) est égal à $\mathcal{T}$.
⊵ Montrons que $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, c'est-à-dire que toute fonction appartenant à $\mathcal{T}$ est une solution de l'équation différentielle (E). Tout élément de $\mathcal{T}$ s'écrit sous la forme

$$\psi = \phi_{0,\kappa} + \phi_1$$

où $\kappa \in \mathbb{R}$. Comme $\phi_{0,\kappa}$ et ϕ_1 sont dérivables sur I, leur somme ψ est également dérivable sur I.
D'autre part, on a

$$\psi' + a\psi = (\phi_1 + \phi_{0,\kappa})' + a(\phi_1 + \phi_{0,\kappa}) = \underbrace{(\phi_1' + a\phi_1)}_{=b} + \underbrace{(\phi_{0,\kappa}' + a\phi_{0,\kappa})}_{=0} = b,$$

donc ψ est solution de (E).
$\trianglerighteq$ Montrons à présent que $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Pour cela, considérons une solution ϕ de l'équation différentielle (E).
La fonction $\phi - \phi_1$ est dérivable sur I (car ϕ et ϕ_1 sont dérivables sur I) et on a

$$(\phi - \phi_1)' + a(\phi - \phi_1) = \underbrace{(\phi' + a\phi)}_{=b} - \underbrace{(\phi_1' + a\phi_1)}_{=b} = 0.$$

On en déduit que $\phi - \phi_1$ est solution de l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E). D'après le théorème 4.1, il existe un réel κ tel que

$$\forall t \in I \quad \phi(t) - \phi_1(t) = \kappa \mathrm{e}^{-A(t)}.$$

Toute solution ϕ de l'équation différentielle (E) est donc de la forme $\phi : t \in I \mapsto \kappa \mathrm{e}^{-A(t)} + \phi_1(t)$.
Elle appartient par conséquent à $\mathcal{T}$. ■

4 Méthode de la variation de la constante

Considérons sur I la solution générale ϕ_0 de l'équation différentielle homogène

$$(E_0) \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

associée à l'équation différentielle non homogène

$$(E) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

D'après le théorème 4.1, cette solution s'écrit comme le produit d'une constante C et de la fonction $g_0 : t \in I \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ où A désigne une primitive de a sur I. Nous allons établir qu'il existe une solution particulière de l'équation différentielle (E) de la forme

$$\phi_1 : t \in I \longmapsto C(t)g_0(t),$$

où C désigne ici une **fonction** dérivable sur I.
L'intérêt de la méthode de **la variation de la constante**, et l'origine de la terminologie employée, est que l'on peut calculer **une solution particulière** de l'équation différentielle (E) en partant de l'expression de la solution générale de l'équation différentielle **homogène** associée à (E) et en remplaçant la constante C par une fonction inconnue $C(.)$ de la variable t.
En écrivant que pour que ϕ_1 soit solution de l'équation différentielle (E), on doit avoir

$$\phi_1'(t) + a(t)\phi_1(t) = b(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

Cette égalité impose une condition sur la dérivée $C'(.)$ qui permet ensuite de déterminer la fonction $C(.)$ par un calcul de primitives.
Justifions la validité de la méthode. Si $\phi_1 = C(.)g_0$ est solution de (E), on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \forall t \in I \quad \phi_1'(t) + a(t)\phi_1(t) = b(t) \\
\Longleftrightarrow\ & \forall t \in I \quad (C(t)g_0(t))' + a(t)C(t)g_0(t) = b(t) \\
\Longleftrightarrow\ & \forall t \in I \quad C'(t)g_0(t) + C(t)g_0'(t) + a(t)C(t)g_0(t) = b(t) \\
\Longleftrightarrow\ & \forall t \in I \quad C'(t)g_0(t) + C(t) \underbrace{g_0'(t) + a(t)g_0(t))}_{\text{nul car } g_0 \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0)} = b(t) \\
\Longleftrightarrow\ & \forall t \in I \quad C'(t)g_0(t) = b(t) \\
\Longleftrightarrow\ & \forall t \in I \quad C(t) = \int \frac{b(t)}{g_0(t)}\mathrm{d}t \quad \text{car la fonction } g_0 \text{ ne s'annule pas sur } I.
\end{aligned}$$

L'équation différentielle (E) admet donc bien une solution particulière de la forme $\phi_1 = C(.)g_0$.
Remarquons que la fonction inconnue $C(.)$ est donnée pour tout $t \in I$ par

$$C(t) = \int \frac{b(t)}{g_0(t)}\mathrm{d}t = \int b(t)\mathrm{e}^{A(t)}\mathrm{d}t = B(t).$$

▷ **Exemple 4.4.**

1. Soit à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E): \quad ty'(t) - y(t) = t^2 e^t, \text{ pour } t \in]0, +\infty[.$$

   (a) Commençons par résoudre l'équation homogène associée :

$$(E_0) \quad ty' - y = 0.$$

   D'après le théorème 4.1, la solution générale de (E_0) est donnée par

$$y_h(t) = \lambda t \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

   (b) On cherche maintenant une solution particulière y_p de l'équation (E) en supposant que la constante λ dépend de t, c'est-à-dire :

$$y_p(t) = \lambda(t)t.$$

   On remplace $y(t)$ et $y'(t)$ dans l'équation (E), on obtient

$$t^2\lambda'(t) + t\lambda(t) - \lambda(t)t = t^2 e^t \Longleftrightarrow \lambda'(t) = e^t.$$

   On en déduit que $\lambda(t) = e^t$.

   D'où la solution générale de l'équation (E) est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= \lambda t + te^t, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) - \frac{y(t)}{t} = t^3, \text{ pour } t \in]0, +\infty[.$$

   (a) La solution générale de l'équation homogène associée est donnée par :

$$y_h(t) = \lambda t.$$

   (b) Cherchons maintenant une solution particulière y_p de l'équation différentielle (E) sous la forme

$$y_p(t) = \lambda(t)t.$$

   Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$\begin{aligned} y_p'(t) - \frac{y_p(t)}{t} = t^3 &\Longleftrightarrow \lambda'(t)t + \lambda(t) - \lambda(t) = t^3 \\ &\Longleftrightarrow \lambda'(t) = t^2. \end{aligned}$$

   Donc, il suffit de choisir $\lambda(t) = \frac{t^3}{3}$, c'est à dire que $y_p(t) = \frac{t^4}{3}$.

   Par conséquent, la solution générale de l'équation (E) est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= \lambda t + \frac{t^4}{3}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

III Quelques classes d'équations différentielles

1 Équations différentielles à variables séparées

Définition 4.4

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Une équation différentielle de premier ordre est dite à **variables séparées**, si elle peut s'écrire sous la forme :

$$(E_{VS}) \quad y'b(y) = a(x), \quad \text{pour tout} \;\; x \in I,$$

où $a(.)$ et $b(.)$ sont deux fonctions définies respectivement sur I et J.

◂ **Remarque 4.2.**
Une fonction y est une solution de l'équation (E_{VS}) si elle est dérivable sur I et vérifie, pour tout $x \in I$:

$$\begin{cases} y(x) \in J, \\ y'(x) \times b(y(x)) = a(x). \end{cases}$$

Méthode de résolution :

Soient $x \mapsto A(x)$ et $x \mapsto B(x)$ des primitives des fonctions $x \mapsto a(x)$ et $x \mapsto b(x)$ sur I et J, respectivement. Pour tout $x \in I$, on a

$$y'(x)b(y(x)) = a(x) \quad \text{donc} \quad (B(y(x)))' = A'(x),$$

d'où

$$B(y(x)) = A(x) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si B est inversible, alors

$$y(x) = B^{-1}\left(A(x) + \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

▹ **Exemple 4.5.**
Considérons l'équation différentielle

$$(E): \quad (1+x^2)^2 y' = -2x(1+y^2), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{y'(x)}{1+y^2(x)} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)} dx = \int \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx,$$

donc

$$\arctan(y(x)) = \frac{1}{1+x^2} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Par suite

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{1+x^2} + \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2 Équations différentielles de Bernoulli

Définition 4.5

On appelle **équation de Bernoulli** une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$(E_{BR}) \quad y' = a(t)y + b(t)y^n,$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$ sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

◂ **Remarque 4.3.**

1. Si $n = 1$, alors l'équation (E_{BR}) est une équation différentielle linéaire de premier ordre.
2. Si $n \neq 1$, alors l'équation de Bernoulli (E_{BR}) se ramène à une équation différentielle linéaire en introduisant le changement de variable $z = y^{1-n}$. En effet

$$z = y^{1-n} \Longrightarrow z' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$$

et l'équation (E_{BR}) devient :

$$\frac{1}{1-n}z' = a(t)z + b(t).$$

▹ **Exemple 4.6.**
Considérons l'équation différentielle

$$(E_{BR}) \quad y' = y + t^2y^2.$$

Posons $z = y^{-1} = \frac{1}{y}$, on trouve alors l'équation suivante :

$$-z' - z = t^2,$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène.

1. La solution de l'équation homogène $-z' - z = 0$ est $z_h(t) = \lambda e^{-t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Une solution particulière de l'équation non homogène $-u' - u = t^2$ est de la forme $u_p(t) = \lambda(t)e^{-t}$. On a

$$\begin{aligned} u_p(t) \text{ une solution de } -z' - z = t^2 &\Longleftrightarrow -u_p'(t) - u_p(t) = t^2 \\ &\Longleftrightarrow \lambda'(t)e^{-t} - \lambda(t)e^{-t} + \lambda(t)e^{-t} = -t^2 \\ &\Longleftrightarrow \lambda'(t) = -t^2e^{-t}. \end{aligned}$$

En utilisant une intégration par partie deux fois, on trouve $\lambda(t) = (-t^2 + 2t - 2)e^t$, c'est à dire que

$$u_p(t) = -t^2 + 2t - 2.$$

Enfin, $u(t) = u_h(t) + u_p(t) = \lambda e^{-t} - t^2 + 2t - 2$, et par conséquent,

$$y(t) = \frac{1}{\lambda e^{-t} - t^2 + 2t - 2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3 Équations différentielles de Riccati

Définition 4.6

Une **équation de Riccati** est une équation différentielle de la forme :

$$(E_{RI}) \quad y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), \tag{4.1}$$

où $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$ et $t \mapsto c(t)$ sont des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

◃ **Remarque 4.4.**

1. S $a \equiv 0$, l'équation différentielle (E_{RI}) devient une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = b(t)y + c(t).$$

2. Si $c \equiv 0$, l'équation différentielle (E_{RI}) devient une équation différentielle de Bernoulli

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y \quad (n = 2).$$

Il est simple de voir que l'on peut ramener l'équation différentielle de Riccati (E_{RI}) en une équation différentielle de Bernoulli par les transformations suivantes :

1. Connaissons une solution particulière y_p de l'équation différentielle de Riccati (E_{RI}).
2. Substituons le changement de variable

$$z = y - y_p. \tag{4.2}$$

Portons l'expression (4.2) dans l'équation différentielle de Riccati (E_{RI}), on obtient une équation différentielle de Bernoulli. En effet

$$\begin{aligned} y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t) &\Longleftrightarrow z' + y_p' = a(t)(z^2 + 2zy_p + y_p^2) + b(t)(z + y_p) + c(t) \\ &\Longleftrightarrow z' = \big(2a(t)y_p + b(t)\big)z + a(t)z^2 + a(t)y_p^2 + b(t)y_p + c(t) - y_p' \\ &\Longleftrightarrow z' = \big(2a(t)y_p + b(t)\big)z + a(t)z^2. \end{aligned}$$

▹ **Exemple 4.7.**
Soit à résoudre l'équation de Riccati suivante :

$$(E) \quad y' = -y^2 + y + 4t^2 + 2t + 2,$$

sachant que $y_p = 2t + 1$ est une solution particulière.
Soit le changement de variable suivant :

$$z = y - y_p.$$

Substituons cette expression dans l'équation (E), afin d'obtenir une équation de Bernoulli de la forme :

$$z' = -(1 + 4t)z - z^2.$$