Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques de Fès
Département de Mathématiques

Cours d'Analyse I

Prof.: Mahmoud El Ahmadi

Année universitaire : 2025-2026

26 janvier 2026

Table des matières

1 Le corps des nombres réels 4

I Rappel . . . 4

1 Ensembles de nombres . . . 4

2 Propriétés algébriques et d'ordre de l'ensemble $\mathbb{R}$ . . . 6

II Intervalles de $\mathbb{R}$ . . . 7

III Lien entre les opérations et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ . . . 9

1 Ordre et addition . . . 9

2 Ordre et produit . . . 10

3 Ordre et puissance . . . 11

4 Ordre et inverse . . . 11

5 Sommes usuelles et identités remarquables . . . 11

6 Valeur absolue . . . 13

IV Les fondements de l'analyse réelle : propriétés de $\mathbb{R}$ . . . 14

1 Majorants et minorants d'une partie de $\mathbb{R}$ . . . 15

2 Bornes supérieure et inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ . . . 17

3 Propriété d'Archimède et partie entière . . . 19

4 Partie dense dans $\mathbb{R}$ . . . 20

5 La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ . . . 21

2 Suites réelles 22

I Généralités . . . 22

1 Modes de définition d'une suite . . . 22

2 Suite majorée, minorée et bornée . . . 23

3 Monotonie d'une suite . . . 24

II Notion de limite d'une suite réelle . . . 25

III Quelques propriétés des suites . . . 28

1 Opérations sur les suites convergentes . . . 28

2 Limites et ordre . . . 29

IV Suites extraites . . . 31

V Théorèmes fondamentaux sur la convergence des suites . . . 32

1 Convergence des suites monotones . . . 32

2 Convergence des suites géométriques $(q^n)_n$ . . . 33

3 Suites adjacentes . . . 34

4 Suites de Cauchy . . . 35

VI Suites récurrentes . . . 38

1 Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques . . . 38

2 Suites récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 39

3 Limites et continuité **41**
I Rappel . . . 41
II Limite d'une fonction . . . 42
1 Définitions et propriétés . . . 42
2 Limites et ordre . . . 48
III Notion de continuité . . . 50
1 Continuité en un point . . . 50
2 Continuité sur un intervalle . . . 53
3 Résultats fondamentaux sur les fonctions continues . . . 54

4 Dérivation et fonctions circulaires **60**
I Dérivation . . . 60
1 Dérivabilité en un point . . . 60
2 Interprétation géométrique du nombre dérivé . . . 63
3 Opérations sur les fonctions dérivables . . . 64
4 Dérivées d'ordres supérieures . . . 67
5 Théorèmes fondamentaux . . . 69
6 Application aux variations d'une fonction . . . 74
7 Règles de l'Hôpital . . . 75
II Fonctions circulaires (directes et réciproques) . . . 77
1 Les fonctions arccos, arcsin et arctan . . . 77
2 Fonctions hyperboliques directes . . . 78
3 Fonctions hyperboliques réciproques . . . 80

5 Développements Limités **82**
I Comparaison de fonctions . . . 82
II Développements limités . . . 85
1 Introduction . . . 85
2 Formules de Taylor . . . 86
3 Développements limités . . . 91

1 Le corps des nombres réels

Le corps des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, constitue la base de toute l'analyse réelle. C'est dans cet ensemble que l'on formalise les notions de limite, de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité. Autrement dit, sans la structure rigoureuse des réels, l'analyse mathématique perdrait son cadre naturel.

Historiquement, les nombres réels sont apparus comme une extension progressive des nombres naturels, puis entiers, rationnels et irrationnels. Leur rôle fondamental est d'offrir un ensemble ≪ continu ≫, permettant de représenter rigoureusement la droite réelle et de traiter des problèmes liés aux grandeurs continues.

Nous allons dans ce chapitre examiner les propriétés essentielles des nombres réels, en commençant par quelques notions fondamentales qui serviront de base à toute l'analyse.

À partir de ces propriétés fondamentales, nous pourrons déduire toutes les autres propriétés classiques des réels (lois de calcul, propriétés des inégalités, valeur absolue, intervalles, etc.), qui serviront de base au développement de l'analyse réelle.

I Rappel

1 Ensembles de nombres

Les principaux ensembles numériques utilisés en analyse sont les suivants :

— **Les entiers naturels** :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

— **Les entiers relatifs** :
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$
obtenus à partir de $\mathbb{N}$ en y ajoutant les opposés des éléments de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

— **Les nombres rationnels** :
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$
Tout rationnel peut être représenté par une fraction irréductible
$$\tfrac{a}{b} \quad \text{avec } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*, \text{ et } pgcd(a, b) = 1.$$

— **Les nombres décimaux** (souvent notés $\mathbb{D}$) : ce sont les rationnels dont l'écriture décimale est finie. Par exemple :
$$\tfrac{3}{2} = 1,5 \in \mathbb{D}, \qquad \tfrac{2}{3} = 0,666\cdots \notin \mathbb{D}.$$
On a donc
$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}.$$

— **Les nombres réels** :
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I},$$
où $\mathbb{I}$ désigne l'ensemble des irrationnels (par exemple $\sqrt{2}, \pi, e$).

— **Les nombres complexes** :
$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}.$$

On obtient ainsi la chaîne d'inclusions fondamentale :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

◃ **Remarque 1.1.**

1. Deux fractions différentes peuvent représenter le même nombre rationnel. Par exemple :
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{-10}{-15}.$$
D'où l'importance de l'écriture irréductible avec $pgcd(a, b) = 1$.

2. L'écriture décimale d'un rationnel est soit finie, soit illimitée périodique.

$$\tfrac{1}{4} = 0,25 \quad \text{(décimale finie)}, \qquad \tfrac{2}{3} = 0,666\ldots \quad \text{(décimale périodique)}.$$

Les nombres irrationnels apparaissent naturellement dans les problèmes géométriques et analytiques. Autrement dit, dès que l'on cherche à mesurer certaines longueurs, surfaces ou valeurs limites, on rencontre des nombres qui ne peuvent pas s'écrire comme une fraction $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

1. **En géométrie** :
   — La diagonale d'un carré de côté 1 vaut
   $$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$
   qui est irrationnel. Ce fut l'un des premiers exemples découverts par les Grecs anciens.
   — La circonférence d'un cercle de rayon r est donnée par
   $$C = 2\pi r.$$
   Ainsi, pour $r = \frac{1}{2}$, on obtient $C = \pi$, qui est un nombre irrationnel.
2. **En analyse** :
   — La constante d'Euler
   $$e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
   est irrationnelle. Elle apparaît dans l'étude des suites, des intégrales et des équations différentielles.
   — De nombreuses intégrales définies fournissent des valeurs irrationnelles. Par exemple :
   $$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$
   Ainsi, une aire géométrique simple conduit au nombre irrationnel π.

Nous allons prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Proposition 1.1

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Preuve.
Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Alors il existe des entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

De plus, supposons que p et q soient premiers entre eux (c'est-à-dire que la fraction $\frac{p}{q}$ soit sous une écriture irréductible).
En élevant au carré, on obtient :

$$2q^2 = p^2.$$

Cette égalité est une égalité d'entiers. L'entier de gauche est pair, donc p^2 est pair. Ainsi p est pair. On peut donc écrire $p = 2p'$ avec $p' \in \mathbb{Z}$.
En remplaçant p par $2p'$ dans l'égalité $2q^2 = p^2$, on obtient :

$$2q^2 = (2p')^2 = 4p'^2 \implies q^2 = 2p'^2.$$

On en déduit que q^2 est pair, donc q est pair.
Ainsi, p et q sont tous les deux pairs, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle ils sont premiers entre eux.
Notre hypothèse de départ est donc fausse. D'où $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ∎

2 Propriétés algébriques et d'ordre de l'ensemble $\mathbb{R}$

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ possède à la fois des propriétés algébriques et des propriétés d'ordre. Pour les mettre en évidence, nous introduisons d'abord quelques notions fondamentales accompagnées d'exemples simples.

2.1 Structures algébriques

Définition 1.1 [Groupe]

Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ vérifiant :

1. **Loi de composition interne** : Pour tous $a, b \in G$, $a * b \in G$.
2. **Associativité** : Pour tous $a, b, c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3. **Élément neutre** : Il existe un élément $e \in G$ tel que $a * e = e * a = a$ pour tout $a \in G$.
4. **Inverse** : Pour tout $a \in G$, il existe $a^{-1} \in G$ tel que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Si l'opération est commutative ($a * b = b * a$), le groupe est dit abélien.

▹ **Exemple 1.1.**
L'ensemble $(\mathbb{R}, +)$ des nombres réels, muni de l'addition, est un **groupe abélien** :
— Élément neutre : 0.
— Inverse de $a \in \mathbb{R}$: $-a$.
— L'addition est associative et commutative.

Définition 1.2 [Anneau]

Un anneau est un ensemble A muni de deux lois de composition internes $+$ et $\cdot$ telles que :

1. $(A, +)$ est un groupe abélien.
2. $(A, \cdot)$ est un semi-groupe, c'est-à-dire que $\cdot$ est une loi de composition interne associative sur A.
3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{et} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

▹ **Exemple 1.2.**
L'ensemble $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ des nombres réels forme un **anneau** :
— Addition : groupe abélien.
— Multiplication : associative et distributive par rapport à l'addition.

Définition 1.3 [Corps]

Un corps est un ensemble K muni de deux lois de composition internes $+$ et $\cdot$ telles que :

1. $(K, +)$ est un groupe abélien.
2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ est un groupe abélien.
3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{pour tous } a, b, c \in K.$$

▹ **Exemple 1.3.**
L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un corps, car il satisfait toutes les propriétés requises pour un corps :

1. **Groupe pour l'addition** : $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien. En effet :
   — Élément neutre : 0, car $a + 0 = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
   — Inverse : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $-a$ est l'inverse additive car $a + (-a) = 0$.
   — Associativité : $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   — Commutativité : $a + b = b + a$.
2. **Groupe pour la multiplication des réels non nuls** : $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ est un groupe abélien. En effet :
   — Élément neutre : 1, car $a \cdot 1 = a$.

— Inverse : pour tout $a \neq 0$, $a^{-1} = 1/a$ vérifie $a \cdot a^{-1} = 1$.
— Associativité : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
— Commutativité : $a \cdot b = b \cdot a$.

3. **Distributivité** : La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{et} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\mathbb{R}$ vérifie toutes les propriétés d'un corps.

2.2 Relation d'ordre

Définition 1.4 [Relation d'ordre]

Une relation d'ordre sur un ensemble E est une relation binaire, notée $\leq$, qui satisfait les propriétés suivantes :

1. **Réflexivité** : Pour tout $a \in E$, $a \leq a$.
2. **Antisymétrie** : Pour tous $a, b \in E$, si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$.
3. **Transitivité** : Pour tous $a, b, c \in E$, si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.

◃ **Remarque 1.2.**
Une relation d'ordre peut être **totale** ou **partielle** :

— **Ordre total** : Tous les éléments sont comparables entre eux, c'est-à-dire que pour tous $a, b \in E$,

$$a \leq b \quad \text{ou} \quad b \leq a.$$

— **Ordre partiel** : Certains éléments ne sont pas comparables.

▹ **Exemple 1.4.**

1. Sur $\mathbb{R}$, la relation $\leq$ est un ordre total :
   — Réflexive : $a \leq a$.
   — Antisymétrique : si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$.
   — Transitive : si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.
   — Total : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ ou $b \leq a$.
2. On peut définir une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$, par exemple en comparant les parties réelles et imaginaires :

$$z_1 = x_1 + iy_1 \leq z_2 = x_2 + iy_2 \quad \text{si et seulement si} \quad x_1 \leq x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2.$$

Cette relation n'est cependant pas totale. En effet, il existe des nombres complexes qui ne sont pas comparables :

— Exemple 1 (éléments comparables) : $z_1 = 1 + 1i$ et $z_2 = 2 + 3i$. Ici $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$, donc $z_1 \leq z_2$.
— Exemple 2 (éléments non comparables) : $z_3 = 1 + 2i$ et $z_4 = 2 + 1i$. Ici $x_3 < x_4$ mais $y_3 > y_4$, donc ni $z_3 \leq z_4$ ni $z_4 \leq z_3$.

Ainsi, cette relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ est partielle, mais jamais totale.

II Intervalles de $\mathbb{R}$

Il existe plusieurs types d'intervalles. Tout est assez intuitif, nous garderons cette forme d'intuition dans les définitions sans aller dans les détails.
Voici tout d'abord la définition générale d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.5

Une partie $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in I \times I,\ \forall z \in \mathbb{R},\quad (x \leq z \leq y) \Rightarrow z \in I.$$

Autrement dit, pour tous $x, y \in I$, on a

$$[x,y] \subset I.$$

◃ **Remarque 1.3.**

1. Une partie I de $\mathbb{R}$ n'est pas un intervalle si :

$$\exists x,y \in I,\ \exists z \in \mathbb{R},\quad (x \leq z \leq y) \text{ et } (z \notin I).$$

2. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
   (a) **Intersection stable** : $I \cap J$ est un intervalle. En effet :
   si $x, y \in I \cap J$ et $x \leq z \leq y$, alors $z \in I$ (car I intervalle) et $z \in J$ (car J intervalle), donc $z \in I \cap J$.
   (b) **Réunion conditionnelle** : $I \cup J$ est un intervalle si et seulement si $I \cap J \neq \emptyset$.

Il existe plusieurs types d'intervalles de $\mathbb{R}$. Nous les présentons ci-dessous sous forme d'exemples :

▹ **Exemple 1.5.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Les intervalles usuels de $\mathbb{R}$ se présentent comme suit :

1. $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
2. $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.
3. $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.
4. $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
5. $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$.
6. $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$.
7. $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$.
8. $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$.
9. $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

Notation:
On notera les intervalles particuliers suivants :

1. $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$.
2. $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$.
3. $\mathbb{R}_- =]-\infty,0]$.
4. $\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0[$.

◃ **Remarque 1.4.**

1. L'intervalle qui ne contient aucun nombre réel est appelé l'ensemble vide, et il est noté $\emptyset$.
2. Un **singleton** est un intervalle qui ne contient qu'un seul nombre réel. Un singleton contenant le nombre réel a s'écrit $\{a\}$.
3. Un singleton $\{a\}$ est considéré comme l'intervalle $[a,a]$, et donc c'est un cas particulier d'intervalle fermé.
4. L'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont les deux seuls intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouverts et fermés. En effet, $\emptyset =]a,a[$ et $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$ sont des ouverts, tandis qu'ils sont fermés car complémentaires l'un de l'autre.

Type	Bornés	Non bornés
Ouverts	$]a,b[$, $\emptyset$	$\mathbb{R}$, $]-\infty,a[$, $]a,+\infty[$
Fermés	$[a,b]$, $\{a\}$, $\emptyset$	$\mathbb{R}$, $]-\infty,a]$, $[a,+\infty[$
Semi-ouverts	$[a,b[$, $]a,b]$	

Table 1.1 – Classification des intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.6 [Intérieur, adhérence et frontière d'un intervalle]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit les ensembles suivants :

1. L'intérieur de I, noté $\overset{\circ}{I}$, est l'ensemble obtenu en retirant les extrémités réelles de I.

2. L'adhérence de I, noté $\overline{I}$, est l'ensemble obtenu en ajoutant les extrémités réelles de I.
3. La frontière de I, notée $\mathrm{Fr}(I)$, est l'ensemble des extrémités réelles de I.

◃ **Remarque 1.5.**
On a la relation : $\mathrm{Fr}(I) = \overline{I} \setminus \overset{\circ}{I}$.

▹ **Exemple 1.6.**

1. $\mathrm{Fr}(]-3,+\infty[) = \{-3\}$.
2. $\mathrm{Fr}(]0,1[) = \{0,1\}$.
3. $\overset{\circ}{[0,1]} =]0,1[$.
4. $\overline{[-3,+\infty[} = [-3,+\infty[$.
5. $\overset{\circ}{]-3,+\infty[} =]-3,+\infty[$.
6. $\overline{]-3,6[} = [-3,6]$.

III Lien entre les opérations et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est étroitement liée aux opérations arithmétiques. L'addition, la multiplication, l'inversion et l'élévation à une puissance s'inscrivent dans cette structure et interagissent de manière cohérente avec l'ordre.

1 Ordre et addition

Propriété 1.1

1. **Additivité de l'ordre** :
$$\forall x,y,z,t \in \mathbb{R}, \quad (x \le y \text{ et } z \le t) \implies x+z \le y+t.$$
2. **Nullité de la somme** :
$$\forall x,y \in \mathbb{R}^+, \quad x+y=0 \implies x=0 \text{ et } y=0.$$
3. **Stricte inégalité additive** :
$$\forall x,y,z,t \in \mathbb{R}, \quad (x \le y \text{ et } z < t) \implies x+z < y+t.$$

Propriété 1.2 [Généralisations]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad x_i \le y_i.$$
Alors :

1. **Inégalité large** :
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sum_{i=1}^{n} y_i.$$
2. **Inégalité stricte** : Si de plus $\exists i_0 \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $x_{i_0} < y_{i_0}$, alors
$$\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} y_i.$$
3. **Égalité** :
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \iff \forall i \in \{1,\ldots,n\}, x_i = y_i.$$

Preuve.

1. Immédiat.
2. Immédiat.
3. On a
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \iff \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) = 0.$$
Or, comme $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $y_i - x_i \geq 0$, la somme est nulle si et seulement si chaque terme est nul, donc
$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, y_i - x_i = 0 \iff \forall i \in \{1,\dots,n\}, x_i = y_i.$$

■

Corollaire 1.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$. Alors :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 0.$
2. S'il existe $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ tel que $x_{i_0} > 0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i > 0.$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \iff \forall i \in \{1,\dots,n\},\ x_i = 0.$

2 Ordre et produit

Propriété 1.3

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes concernant la multiplication et les inégalités sont vérifiées :

1. **Compatibilité multiplication-ordre** :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}_+, \quad x \leq y \Rightarrow xz \leq yz.$$
2. **Multiplication d'inégalités** :
$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}_+, \quad (x \leq y \text{ et } z \leq t) \Rightarrow xz \leq yt.$$
3. **Multiplication avec inégalité stricte** :
$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}_+, \quad (x \leq y \text{ et } z < t) \Rightarrow xz < yt.$$

◃ **Remarque 1.6.**

1. **Soustraction membre à membre :** En général, on ne peut pas retrancher membre à membre deux inégalités. C'est-à-dire :
$$a \leq b \quad \text{et} \quad c \leq d \quad \not\Rightarrow \quad a - c \leq b - d.$$
2. **Division membre à membre :** De même, on ne peut pas diviser membre à membre deux inégalités. C'est-à-dire :
$$0 \leq a \leq b \quad \text{et} \quad 0 < c \leq d \quad \not\Rightarrow \quad \frac{a}{c} \leq \frac{b}{d}.$$

3 Ordre et puissance

Propriété 1.4

1. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$a^n \in \mathbb{R}_+.$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $0 < a < b$, alors :
$$0 < a^n < b^n.$$

4 Ordre et inverse

Propriété 1.5

Soient x et y deux nombres réels non nuls de **même signe**.

1. $x \leq y \implies \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$
2. $x < y \implies \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$

5 Sommes usuelles et identités remarquables

Propriété 1.6 [Sommes usuelles]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Preuve.

1. La formule est triviale par récurrence.
2. On utilise l'identité
$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$
En sommant cette égalité pour $k = 1, 2, \ldots, n$, on obtient
$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$
Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi
$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n}{3}.$$

En simplifiant le numérateur, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Posons $S(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$. Pour $n = 1$, $S(1) = 1 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$. Supposons la formule vraie pour n, i.e.

$$S(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Alors

$$S(n+1) = S(n) + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3.$$

Factorisons :

$$S(n+1) = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = (n+1)^2 \cdot \frac{(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Donc la formule est vraie pour $n+1$. Par récurrence, elle est donc valable pour tout $n \geq 1$.

■

Exercice 1.1

Soit P un polynôme de degré 4 tel que

$$P(X+1) - P(X) = X^3.$$

1. Déterminer un tel polynôme P.
2. En déduire une nouvelle preuve du résultat 3.

Propriété 1.7 [Identités remarquables]

1. **Relation de Pascal** : Pour tous entiers p et n tels que $0 \leq p < n$, on a

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1},$$

où $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ est le coefficient binomial, avec $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ et $0! = 1$.

2. **Formule du binôme de Newton** : Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

3. **Factorisation remarquable** : Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right).$$

4. **Conséquence** : Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a également

$$a^n + b^n = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k\right) \quad \text{lorsque } n \text{ est impair.}$$

◃ **Remarque 1.7.**
Pour calculer les coefficients binomiaux C_n^p pour de grandes valeurs de n, on utilise le triangle de Pascal, qui découle directement de la relation de récurrence suivante :

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p,$$

pour tous entiers p et n tels que $1 \leq p \leq n$.

▹ **Exemple 1.7.**
Soient a et b deux réels. Développons l'expression :

$$(a+b)^4.$$

En utilisant le triangle de Pascal pour $n = 4$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

On obtient ainsi les coefficients binomiaux pour $n = 4$: 1, 4, 6, 4, 1.
D'où le développement :

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + C_4^4 b^4 \\ &= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

6 Valeur absolue

Définition 1.7 [Valeur absolue]

Soit $a \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de a est le réel noté $|a|$ défini par :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a \leq 0. \end{cases}$$

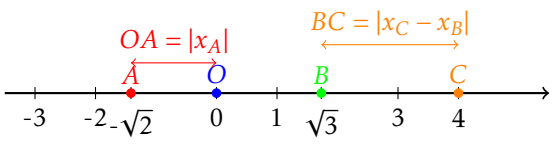
On a également l'égalité : $|a| = \max(-a, a)$.

▹ **Exemple 1.8.**

1. $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$
2. $|\sqrt{3} - 4| = 4 - \sqrt{3}$, car $\sqrt{3} - 4 < 0$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x-y| = \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y, \\ y-x & \text{si } x \leq y. \end{cases}$

◃ **Remarque 1.8.**
Si on positionne les points $A(-\sqrt{2})$, $B(\sqrt{3})$ et $C(4)$ sur la droite numérique, on remarque que :

$$OA = |x_A| \quad \text{et} \quad BC = |x_C - x_B|.$$

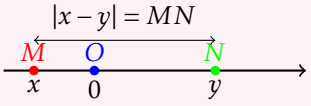


La valeur absolue d'un réel x est donc la distance entre le point d'abscisse x et l'origine O sur la droite numérique. On peut en déduire les résultats suivants.

Propriété 1.8 [Interprétation géométrique]

Soient x et y deux réels.

1. $|x|$ est la distance, sur la droite numérique, entre les points M et O d'abscisses respectives x et 0. C'est-à-dire $|x| = OM$.
2. $|x-y|$ est la distance, sur la droite numérique, entre les points M et N d'abscisses respectives x et y. C'est-à-dire $|x-y| = MN$.



Cette interprétation géométrique de la valeur absolue comme distance constitue un outil fondamental pour démontrer les propriétés suivantes :

Propriété 1.9 [Propriétés algébriques]

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. $displaystyle|x| = 0 \iff x = 0$.
2. $|xy| = |x||y|$, en particulier $|-x| = |x|$.
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, pour $y \neq 0$.
4. $|x^n| = |x|^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $\sqrt{x^2} = |x|$.
6. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire).
7. $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$.
8. $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$.
9. $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$.
10. $|x| \geq r \iff x \geq r$ ou $x \leq -r$.

Preuve.
À titre d'exercice. ■

Exercice 1.2
Soient a et b deux nombres réels. Montrer que :

1. $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.
2. $\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.
3. $a = \max(a,0) + \min(a,0)$ et $|a| = \max(a,0) - \min(a,0)$.

Exercice 1.3
Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leq \varepsilon.$$

Montrer que $a = 0$.

IV Les fondements de l'analyse réelle : propriétés de $\mathbb{R}$

Pour construire rigoureusement l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels à partir de $\mathbb{Q}$, nous allons utiliser une approche basée sur la notion de borne supérieure. Cette méthode, bien que non unique, est particulièrement adaptée à une première construction formelle des réels. Avant d'aborder cette construction, nous devons d'abord introduire les notions préliminaires de majorant, minorant et d'ensemble borné, qui sont les fondements nécessaires à la compréhension de la borne supérieure et de la borne inférieure.

1 Majorants et minorants d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 1.8 [Majorant, minorant, ensemble borné]

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que :

1. E est **majorée** s'il existe un nombre réel M (appelé **majorant** de E) tel que :
$$\forall x \in E, \quad x \leq M$$
Un majorant n'est pas nécessairement unique et n'appartient pas forcément à E.
2. E est **minorée** s'il existe un nombre réel m (appelé **minorant** de E) tel que :
$$\forall x \in E, \quad x \geq m$$
Un minorant n'est pas nécessairement unique et n'appartient pas forcément à E.
3. E est **bornée** si E est à la fois majorée et minorée.

▹ **Exemple 1.9.**

1. L'intervalle $]-\infty, \sqrt{3}[$ est majoré par $\sqrt{3}$ et par tout nombre supérieur à $\sqrt{3}$, mais il n'est pas minoré.
2. L'ensemble $A = \{\sin(x) + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ est majoré par 3 et minoré par 1, donc il est borné.

◃ **Remarque 1.9.**

1. Si M est un majorant de A, alors tout nombre supérieur à M est aussi un majorant de A.
2. Si m est un minorant de A, alors tout nombre inférieur à m est aussi un minorant de A.

Exercice 1.4
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. A est majorée si et seulement si $-A = \{-x \mid x \in A\}$ est minorée.
2. A est minorée si et seulement si $-A = \{-x \mid x \in A\}$ est majorée.

Indication : Utiliser le fait que $x \leq M \iff -x \geq -M$.

Propriété 1.10 [Caractérisation des parties bornées]

Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si :
$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \ \forall x \in A, \ |x| \leq K$$

Preuve.

1. $\Longrightarrow$) Supposons que A est une partie bornée de $\mathbb{R}$. Alors par définition, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall x \in A, \ m \leq x \leq M.$$
Posons $K = \max(|m|, |M|)$. Montrons que $\forall x \in A, \ |x| \leq K$. Soit $x \in A$ quelconque. On a deux cas :
Cas 1 : Si $x \geq 0$, alors
$$|x| = x \leq M \leq |M| \leq \max(|m|, |M|) = K.$$
Cas 2 : Si $x < 0$, alors
$$|x| = -x \leq -m \leq |m| \leq \max(|m|, |M|) = K.$$
Dans les deux cas, on a bien $|x| \leq K$. Donc il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A, \ |x| \leq K$.
2. $\Longleftarrow$) Trivial (car $|x| \leq K \iff -K \leq x \leq K$).

■

▹ **Exemple 1.10.**
Soit $A = \left\{ \frac{p+1}{p^2+1} + \frac{(-1)^n}{n} \mid (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que A est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.5
On considère l'ensemble

$$B = \left\{ \frac{e^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Vérifier que B est un ensemble minoré.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$e^n \geq 1 + n(e-1) + \frac{n(n-1)}{2}(e-1)^2$$

3. Déduire que l'ensemble B n'est pas majoré.

Définition 1.9 [Maximum et Minimum]

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est le **maximum** de A si :
   (a) α est un majorant de A : $\forall x \in A,\ x \leq \alpha$,
   (b) α appartient à A : $\alpha \in A$.
   On le note $\alpha = \max(A)$.
2. On dit que $\beta \in \mathbb{R}$ est le **minimum** de A si :
   (a) β est un minorant de A : $\forall x \in A,\ x \geq \beta$,
   (b) β appartient à A : $\beta \in A$.
   On le note $\beta = \min(A)$.

▹ **Exemple 1.11.**

1. $A = [0,1]$: $\min(A) = 0$, $\max(A) = 1$.
2. $A =]0,1[$: ni minimum ni maximum (car $0, 1 \notin A$).
3. $A = \{2,4,6,8\}$: $\min(A) = 2$, $\max(A) = 8$.
4. $A = \mathbb{N}$: $\min(A) = 0$, mais $\max(A)$ n'existe pas (ensemble infini et non majoré).
5. $A = \varnothing$: ni minimum ni maximum.
6. $A = \mathbb{Z}$: ni minimum ni maximum (ensemble infini non borné).

Proposition 1.2

Si $\max(A)$ (resp. $\min(A)$) existe, alors il est unique.

Preuve.
À titre d'exercice. ■

◃ **Remarque 1.10.**

1. Si A admet un minimum et un maximum, alors

$$\forall x \in A : \quad \min(A) \leq x \leq \max(A).$$

2. Si A admet un maximum et si M est un majorant de A, alors

$$\max(A) \leq M.$$

3. Si A admet un minimum et si m est un minorant de A, alors

$$\min(A) \geq m.$$

Exercice 1.6
Soit l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + 1 \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

L'ensemble A admet-il un maximum et un minimum ? Si oui, quels sont-ils ?

2 Bornes supérieure et inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 1.10

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est la **borne supérieure** de A si :
   (a) M est un majorant de A.
   (b) M est le plus petit des majorants, c'est-à-dire que pour tout majorant M' de A, on a
   $$M \leq M'.$$
   On note $M = \sup(A)$.
2. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est la **borne inférieure** de A si :
   (a) m est un minorant de A.
   (b) m est le plus grand des minorants, c'est-à-dire que pour tout minorant m' de A, on a
   $$m' \leq m.$$
   On note $m = \inf(A)$.

▹ **Exemple 1.12.**
Considérons l'ensemble $A =]-\infty, 2[$.
— A admet une borne supérieure : $\sup(A) = 2$.
— En revanche, A n'a pas de maximum, car $2 \notin A$.

◃ **Remarque 1.11.**

1. $\sup(A)$ existe $\not\Longrightarrow$ $\max(A)$ existe. (Voir l'exemple précédent).
2. $\max(A)$ existe $\Longrightarrow$ $\sup(A)$ existe et dans ce cas $\sup(A) = \max(A)$.
3. $\sup(A)$ existe et $\sup(A) \in A$ $\Longrightarrow$ $\max(A)$ existe et $\max(A) = \sup(A)$.
4. $\inf(A)$ existe et $\inf(A) \in A$ $\Longrightarrow$ $\min(A)$ existe et $\min(A) = \inf(A)$.
5. Pour tout $x \in A$, on a
   $$\inf(A) \leq x \leq \sup(A).$$
6. Si M est un majorant de A, alors
   $$\sup(A) \leq M.$$
7. Si m est un minorant de A, alors
   $$\inf(A) \geq m.$$

Afin de mieux comprendre et manipuler les notions de borne supérieure et de borne inférieure, il est utile de disposer d'une caractérisation plus opérationnelle. Celle-ci jouera un rôle important dans l'étude des suites, en particulier pour établir leur convergence.

Proposition 1.3 [Caractérisation de la borne supérieure et inférieure]

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide.

1. Si E est majorée, alors $M = \sup(E)$ si et seulement si :
   — M est un majorant de E, c'est-à-dire, pour tout $x \in E$, $x \leq M$.
   — Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $x > M - \varepsilon$.
   Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un élément de E dans l'intervalle $]M - \varepsilon, M]$.

2. Si E est minorée, alors $m = \inf(E)$ si et seulement si :
   — m est un minorant de E, c'est-à-dire, pour tout $x \in E$, $x \geq m$.
   — Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $x < m + \varepsilon$.
   Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un élément de E dans l'intervalle $[m, m + \varepsilon[$.

Preuve.
Preuve donnée lors de la séance du cours. ■

Exercice 1.7
Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose

$$A + B = \{a + b \ : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

1. Montrer que $A + B$ est non vide et majorée, et que
$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$
2. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et que
$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)).$$

On peut maintenant décrire une façon de construire $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ correspond à $\mathbb{Q}$ auquel on ajoute toutes les bornes supérieures et inférieures de sous-ensembles de $\mathbb{Q}$.
On obtient alors les deux propriétés suivantes :

Propriété 1.11

1. Toute partie **non vide** et **majorée** de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
2. Toute partie **non vide** et **minorée** de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 1.2

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide.

1. Si A admet une borne supérieure, alors l'ensemble
$$-A = \{-x \ : \ x \in A\}$$
admet une borne inférieure, et on a
$$\inf(-A) = -\sup(A).$$
2. Si A admet une borne inférieure, alors l'ensemble $-A$ admet une borne supérieure, et on a
$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

Propriété 1.12

Tout réel $r \in \mathbb{R}$ peut s'interpréter comme :

1. la borne supérieure d'un ensemble $A \subset \mathbb{Q}$, c'est-à-dire
$$r = \sup(A).$$
2. la borne inférieure d'un ensemble $B \subset \mathbb{Q}$, c'est-à-dire
$$r = \inf(B).$$

◃ **Remarque 1.12.**

1. La première propriété de complétude est due à Bernhard Bolzano en 1817.

2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'a pas la propriété de la borne supérieure. Par exemple, l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 < 2\},$$

admet $\sqrt{2}$ comme borne supérieure dans $\mathbb{R}$, mais n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

3 Propriété d'Archimède et partie entière

Proposition 1.4 [Propriété d'Archimède]

Le corps des réels $\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est-à-dire :

$$\forall x > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} : nx > y.$$

Preuve.
Preuve donnée lors de la séance du cours. ■

On peut formuler une propriété plus précise qui conduit naturellement à l'introduction de la notion de partie entière.

Proposition 1.5

Étant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$na \leq x < (n+1)a.$$

Preuve.
Preuve donnée lors de la séance du cours. ■

Si l'on applique la proposition précédente avec $a = 1$, l'entier n obtenu s'appelle la partie entière de x.

Définition 1.11 [Partie entière]

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$n \leq x < n+1,$$

s'appelle la **partie entière** de x et est noté $E(x)$ ou $[x]$.

▹ **Exemple 1.13.**

1. $E(3.7) = 3$.
2. $E(-1.2) = -2$.
3. $E(-\pi) = -4$.
4. $\forall n \in \mathbb{Z},\quad E(n) = n$.

◃ **Remarque 1.13.**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$x = E(x) + \{x\}, \quad \text{où } \{x\} \in [0,1[\text{ est la partie fractionnaire de } x.$$

Propriété 1.13

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. $E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$.
2. $x \leq y \implies E(x) \leq E(y)$, c'est-à-dire que la fonction partie entière est croissante.
3. $\forall n \in \mathbb{Z},\quad E(x+n) = E(x) + n$.

4. $E(x+y) = E(x) + E(y) + \alpha$, avec $\alpha = 0$ ou 1.

Preuve.
Preuve donnée lors de la séance du cours. ■

Exercice 1.8
Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$$

4 Partie dense dans $\mathbb{R}$

Définition 1.12 [Partie dense]

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ avec $A \subset B$. On dit que A est **dense** dans B si, pour tout couple $(a,b) \in B^2$ tel que $a < b$, il existe un élément $c \in A$ vérifiant :

$$a < c < b.$$

Autrement dit, cela revient à dire :

$$\forall (a,b) \in B^2,\ a < b \implies]a,b[\cap A \neq \varnothing.$$

◃ **Remarque 1.14.**
Cette définition indique que pour tout intervalle de B, aussi petit soit-il, on trouve toujours au moins un point de A.

Théorème 1.1

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout couple de réels $a < b$, il existe un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < b$.

Preuve.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Posons $\varepsilon = b - a > 0$.
D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{1}{n} < b - a.$$

Soit $m = E(an) + 1$. Par définition de la partie entière, nous avons l'encadrement :

$$E(an) \leq an < E(an) + 1.$$

D'où l'on tire immédiatement :

$$an < m \implies a < \frac{m}{n}.$$

En utilisant à nouveau la définition de la partie entière $(m - 1 \leq an)$, on obtient :

$$a < \frac{m}{n} = \frac{(m-1)+1}{n} \leq \frac{an+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$

En posant $q = \frac{m}{n}$, on a bien $q \in \mathbb{Q}$ et :

$$a < q < b,$$

ce qui prouve que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ■

Exercice 1.9
Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

5 La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1.13

La droite numérique achevée est l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

◃ **Remarque 1.15.**

1. On prolonge la relation d'ordre "$\leq$" sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :
$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty.$$
2. Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie non vide admet une borne supérieure et une borne inférieure.
3. On peut prolonger partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations sur $\mathbb{R}$ en utilisant les tableaux suivants :

Addition			
$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	indéterminé
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	indéterminé	$+\infty$	$+\infty$

Multiplication					
$\times$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	indéterminé	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	indéterminé	0	0	0	indéterminé
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	indéterminé	$+\infty$	$+\infty$

2 Suites réelles

La notion de suite et de limite remonte à la méthode d'exhaustion d'Archimède, utilisée pour approcher des aires et des volumes à l'aide de figures successives. Ces idées annoncent la théorie moderne de la limite, au cœur de l'analyse.

Ce chapitre expose les propriétés essentielles des suites réelles, qui servent de fondement à l'étude des séries et à la compréhension des notions de limite et de convergence.

I Généralités

Définition 2.1

Une suite est une application

$$u : I \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},$$

où I est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in I$, on note $u(n)$ par u_n, que l'on appelle le n-ième terme ou terme général de la suite.

◃ **Remarque 2.1.**

1. La suite est notée u, ou plus souvent $(u_n)_{n\in I}$ ou simplement (u_n).
2. Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0, on note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.
3. Une suite est dite finie si I est un ensemble fini de $\mathbb{N}$.

▹ **Exemple 2.1.**

- $(\sqrt{n})_{n\geqslant 0}$ est la suite de termes : $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$
- $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ est la suite alternée dont les termes sont : $+1, -1, +1, -1, \ldots$

1 Modes de définition d'une suite

Définition 2.2

Une suite numérique peut être définie de plusieurs manières :

- ▶ **Par une liste** : c'est-à-dire en donnant plusieurs termes successifs à partir du premier, ce qui permet de se faire une idée des termes suivants.
- ▶ **Par une formule explicite** : c'est-à-dire à l'aide d'une expression donnant le terme général u_n en fonction de n.
- ▶ **Par une formule de récurrence** : c'est-à-dire en donnant le premier terme et une relation liant un terme à un ou plusieurs termes qui le précèdent.

▹ **Exemple 2.2.**

1. Soit la suite (u_n) dont les premiers termes sont :

   $$3, 7, 11, 15, 19, \ldots$$

   On dit que (u_n) est définie par une **liste**.
   — Le premier terme est **3**.
   — Le sixième terme est **23**.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dont le terme général est

   $$u_n = n^2 + 2n + 5.$$

   Ici, (u_n) est définie par une **formule explicite**.

3. Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_{n+1} = 2\,u_n + 5, \quad n \geq 0. \end{cases}$$
Ici, (u_n) est définie par une **formule de récurrence**.

Définition 2.3

Une suite (u_n) est dite **stationnaire** s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait
$$u_n = u_{n_0}.$$
Autrement dit, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont constants.

▹ **Exemple 2.3.**
Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par
$$u_n = \lfloor \tfrac{5}{n} \rfloor,$$
où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

On a :
$$u_1 = 5, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 1, \quad \text{et pour tout } n \geq 6,\ u_n = 0.$$
Ainsi, la suite (u_n) est **stationnaire à partir du rang** $n_0 = 5$.

2 Suite majorée, minorée et bornée

Définition 2.4

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite réelle.

1. La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que
$$\forall n \in I, \quad u_n \leq M.$$
On dit alors que M est un **majorant** de la suite.
2. La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que
$$\forall n \in I, \quad u_n \geq m.$$
On dit alors que m est un **minorant** de la suite.
3. La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. Autrement dit, il existe deux réels m et M tels que
$$\forall n \in I, \quad m \leq u_n \leq M.$$

▹ **Exemple 2.4.**

1. La suite définie par $u_n = n^2$ est **minorée** par 0.
2. La suite définie par $v_n = \frac{1}{1+n^2}$ est **majorée** par 1.
3. Les suites définies par $w_n = \cos(n)$ et $z_n = (-1)^n$ sont **bornées**.

Proposition 2.1 [Caractérisation d'une suite bornée]

Une suite réelle $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel $M > 0$ tel que
$$\forall n \in I, \quad |u_n| \leq M.$$

Preuve.
($\Rightarrow$) Supposons que la suite (u_n) soit bornée. Par définition, il existe deux réels m et M tels que

$$\forall n \in I, \quad \forall m \leq u_n \leq M.$$

Alors, pour tout $n \in I$, on a

$$|u_n| \leq \max(|m|, |M|).$$

En posant $M' = \max(|m|, |M|)$, on obtient

$$\forall n \in I, \quad |u_n| \leq M'.$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|u_n| \leq M, \quad \forall n \in I.$$

Alors pour tout $n \in I$, on a

$$-M \leq u_n \leq M,$$

ce qui montre que (u_n) est bornée. ■

3 Monotonie d'une suite

Définition 2.5 [Monotonie d'une suite]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que (u_n) est :

1. **croissante** si
$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad n \leq p \implies u_n \leq u_p;$$
2. **strictement croissante** si
$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad n < p \implies u_n < u_p;$$
3. **décroissante** si
$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad n \leq p \implies u_n \geq u_p;$$
4. **strictement décroissante** si
$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad n < p \implies u_n > u_p;$$
5. **constante** si
$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p.$$
6. **monotone** (respectivement **strictement monotone**) si elle est soit croissante, soit décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).

La définition de la monotonie repose sur la comparaison de tous les termes, mais il est souvent plus simple de se limiter à la comparaison de termes consécutifs. Le résultat suivant précise ce critère.

Proposition 2.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors :

1. (u_n) est **croissante** $\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$.
2. (u_n) est **décroissante** $\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$.
3. (u_n) est **constante** $\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n$.

Preuve.
Traitons le cas des suites **croissantes**. Le cas des suites **décroissantes** s'obtient alors en appliquant le même résultat à la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— L'implication $\Longrightarrow$ est évidente.
— Montrons $\Longleftarrow$: Supposons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence immédiate, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+k}.$$

En particulier, pour tout $p \geq n$, en posant $k = p - n$, on obtient

$$u_n \leq u_p.$$

Cela montre que (u_n) est bien croissante. ■

◃ **Remarque 2.2.**

1. Ne pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$.
2. Lorsque tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut également comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 & \Rightarrow \text{la suite est croissante,} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 & \Rightarrow \text{la suite est décroissante.} \end{cases}$$

3. Si une suite est **croissante**, alors elle est **minorée** par son premier terme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq u_0$.
4. Si une suite est **décroissante**, alors elle est **majorée** par son premier terme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq u_0$.
5. Il existe des suites qui ne sont ni **croissantes** ni **décroissantes** ; on dit alors qu'elles sont **non monotones**. Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$.

Exercice 2.1
Étudier la monotonie de chacune des suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par :

- ❑ $u_n = 3n + (-1)^n$.
- ❑ $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n^2 + v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
- ❑ $w_n = \dfrac{2^n}{n}$.

II Notion de limite d'une suite réelle

Vous avez déjà appris, de façon informelle, la notion de limite. Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que la limite de la suite est ℓ signifie que « tous les termes de la suite deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ à partir d'un certain rang ». Autrement dit, la « distance » entre u_n et ℓ devient aussi petite que l'on veut lorsque n devient grand. Or, dans $\mathbb{R}$, la distance entre deux nombres réels x et y est donnée par $|x - y|$. Ainsi, le « aussi proche que l'on veut » signifie que, quel que soit l'écart (noté ε) strictement positif, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite vérifient :

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ceci nous amène à poser une définition plus formelle de la notion de limite.

Définition 2.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **admet ℓ pour limite** si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon).$$

◃ **Remarque 2.3.**

1. Une autre écriture équivalente est :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet } \ell \text{ pour limite } \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

2. Le rang N **dépend du choix de** ε. Plus ε est petit, plus le rang N nécessaire pour que la condition soit vérifiée peut être grand.

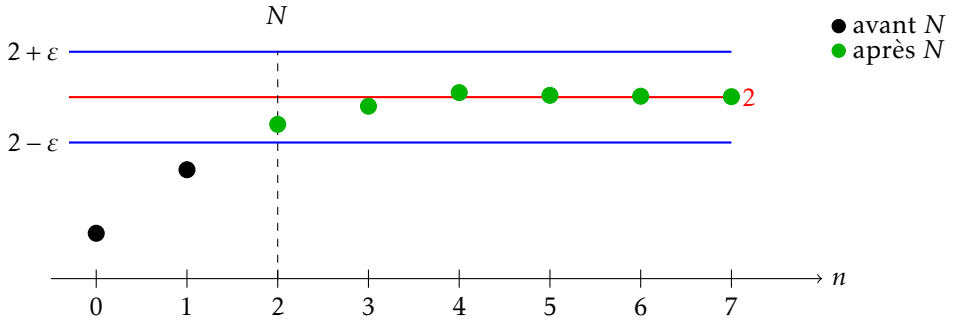


FIGURE 2.1 – Convergence d'une suite à partir du rang N

Corollaire 2.1

Une suite numérique (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

Preuve.
Ceci est immédiat. En effet,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon\Big) \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geq N \Rightarrow |(u_n - \ell) - 0| \leq \varepsilon\Big).$$

■

Exercice 2.2
En utilisant la définition, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{n-2}{n+1}$ est convergente de limite 1.

Proposition 2.3

Si une suite (u_n) de réels admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors cette limite est **unique**.

Preuve.
Supposons, par l'absurde, que la suite (u_n) admette deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2, avec $\ell_1 \neq \ell_2$. Par définition de la convergence, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_1 \implies |u_n - \ell_1| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}.$$

De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_2 \implies |u_n - \ell_2| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a donc simultanément

$$|u_n - \ell_1| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \quad \text{et} \quad |u_n - \ell_2| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} + \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} = \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|,$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, la limite est unique. ■

Proposition 2.4

Si une suite (u_n) de réels converge, alors elle est bornée.

Preuve.
Supposons que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition de la convergence, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies |u_n - \ell| < 1.$$

Donc, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$

Pour les indices $n < N$, il y a un nombre fini de termes $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$. On peut donc poser

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|\}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq M$, ce qui montre que (u_n) est bornée. ■

◃ **Remarque 2.4.** ⚠
La réciproque n'est pas vraie : une suite bornée n'est pas forcément convergente. Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ est bornée, mais elle ne converge pas.

Proposition 2.5

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors la suite $(|u_n|)_n$ converge vers $|\ell|$.

Preuve.
Le résultat découle directement de l'inégalité triangulaire modifiée :

$$\big||u_n| - |\ell|\big| \leq |u_n - \ell|.$$

■

◃ **Remarque 2.5.** ⚠
La réciproque n'est pas vraie. En effet, la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = (-1)^n$ ne converge pas, tandis que la suite $(|u_n|)_n$ est convergente de limite 1.

Proposition 2.6

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle qui converge vers ℓ. Si $\ell \neq 0$, alors les termes u_n et la limite ℓ ont le même signe à partir d'un certain rang : il existe N tel que

$$\forall n \geq N, \quad u_n \times \ell > 0.$$

Preuve.

- Supposons par exemple que $\ell > 0$. Prenons $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$. Comme $u_n \to \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On en déduit :

$$-\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon \quad \implies \quad \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon.$$

Or $\ell - \varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$, donc $u_n > 0$ pour tout $n \geq N$.

► Le raisonnement est analogue si $\ell < 0$: en prenant $\varepsilon = \dfrac{-\ell}{2}$, on obtient $u_n < 0$ à partir d'un certain rang. Ainsi, u_n et ℓ ont le même signe à partir d'un certain rang. ■

Définition 2.7

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. On dit que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ si :
$$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n > M,$$
et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. On dit que $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ si :
$$\forall M < 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n < M,$$
et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

◃ **Remarque 2.6.**
On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est divergente si elle n'admet pas de limite finie, c'est-à-dire si elle tend vers $+\infty$, $-\infty$, ou si la limite n'existe pas.

III Quelques propriétés des suites

1 Opérations sur les suites convergentes

Proposition 2.7

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques convergentes de limites a et b, respectivement, et soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

1. La suite $(\alpha u_n \pm \beta v_n)_n$ converge vers $\alpha a \pm \beta b$.
2. La suite $(u_n v_n)_n$ converge vers $a \times b$.
3. Si $b \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ converge vers $\frac{a}{b}$.

◃ **Remarque 2.7.** ⚠

1. Lorsque le **nombre de termes** dépend de l'indice n, on ne peut pas échanger la limite avec l'opération considérée (somme, produit, etc.). Par exemple
$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{(u_n + \cdots + u_n)}_{n \text{ termes}} \neq \lim_{n\to+\infty} u_n + \cdots + \lim_{n\to+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \underbrace{((1-u_n) \times \cdots \times (1-u_n))}_{n \text{ facteurs}} \neq \lim_{n\to+\infty} (1-u_n) \times \cdots \times \lim_{n\to+\infty} (1-u_n).$$
2. Le théorème précédent s'étend facilement aux cas des suites qui tendent vers $\pm\infty$ en utilisant les opérations sur $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.8

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs.

1. Si $u_n \to +\infty$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to 0$.
2. Si $u_n \to 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$.

◃ **Remarque 2.8.**

1. Les résultats précédents restent valables si les termes de la suite sont strictement négatifs.
2. La condition de signe constant est indispensable. En effet, la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0, mais la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$ n'est pas convergente. Cela montre que sans la condition de signe, les conclusions précédentes peuvent échouer.

2 Limites et ordre

Proposition 2.9

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de réels qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. On suppose qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq v_n.$$

Alors on a :

$$\ell \leq \ell'.$$

Preuve.
À titre d'exercice. ■

◃ **Remarque 2.9.** ⚠
La proposition précédente n'est plus vraie si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes. Par exemple, considérons les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$u_n = 0 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, on a $u_n < v_n$, mais les deux suites convergent vers la même limite 0. Ainsi, la conclusion $\ell < \ell'$ ne découle pas d'inégalités strictes sur les suites.

Corollaire 2.2

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.
Si $(u_n)_n$ converge vers 0 et $(v_n)_n$ est bornée, alors la suite $(u_n v_n)_n$ converge également vers 0.

Preuve.
La preuve découle directement de la proposition précédente. ■

Théorème 2.1 [Théorème des gendarmes]

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles. On suppose que :

1. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq n_0, \quad v_n \leq u_n \leq w_n.$$
2. Les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ :
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell.$$

Alors la suite $(u_n)_n$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Preuve.
Preuve donnée lors de la séance du cours. ■

▹ **Exemple 2.5.**
On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{E(\ln(n))}{\ln(2n+1)}$.
Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2.3
Un étudiant propose la démonstration suivante, beaucoup plus simple :

« Puisque $v_n \leq u_n \leq w_n$ et que le passage à la limite est compatible avec la relation d'ordre,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} w_n.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, c'est-à-dire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est ℓ. »

Question : Quelle est l'erreur dans ce raisonnement ?

Proposition 2.10

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \geq u_n$ à partir d'un certain rang, alors $v_n \to +\infty$.
2. Si $u_n \to -\infty$ et $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang, alors $v_n \to -\infty$.

Preuve.
À titre d'exercice. ■

Théorème 2.2 [Caractérisation de la borne supérieure à l'aide des suites]

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée. On a

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} (i) & M \text{ est un majorant de } A, \\ (ii) & \exists (u_n) \subset A \text{ tel que } u_n \to M. \end{cases}$$

Preuve.

1. $\Longrightarrow$) Supposons que $M = \sup(A)$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A. Il existe donc $x_\varepsilon \in A$ tel que
$$x_\varepsilon > M - \varepsilon.$$
On définit alors une suite $(u_n) \subset A$ en posant $u_n = x_{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors
$$M - \frac{1}{n} < u_n \leq M,$$
d'où, par le théorème des gendarmes, $u_n \to M$.
2. $\Longleftarrow$) Supposons que M est un majorant de A et qu'il existe une suite $(u_n) \subset A$ telle que $u_n \to M$. Montrons que M est le plus petit des majorants.
Soit $M' < M$. Comme $u_n \to M$, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > M'$. Ainsi M' n'est pas un majorant de A.
Par conséquent, aucun nombre strictement inférieur à M n'est un majorant de A, donc $M = \sup(A)$.

■

◃ **Remarque 2.10.**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée. De manière analogue, on a :

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} (i) & m \text{ est un minorant de } A, \\ (ii) & \exists (u_n) \subset A \text{ tel que } u_n \to m. \end{cases}$$

▹ **Exemple 2.6.**
Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A + B$ est non vide et majorée, et que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

IV Suites extraites

Définition 2.8

Soit (u_n) une suite réelle. Une suite (v_k) est appelée **sous-suite** ou **suite extraite** de (u_n) s'il existe une application strictement croissante

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k = u_{\varphi(k)}.$$

Une telle application φ est appelée **une extractrice**.

▹ **Exemple 2.7.**
Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des sous-suites de (u_n), car les applications $n \mapsto 2n$ et $n \mapsto 2n+1$ sont strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Lemme 2.1

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n.$$

Preuve.
La propriété se démontre facilement par récurrence sur n. ∎

Proposition 2.11

Soit (u_n) une suite numérique.
Si (u_n) converge vers ℓ, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

Preuve.
Soit (v_k) une suite extraite de (u_n). Par définition, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $v_k = u_{\varphi(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Comme (u_n) converge vers ℓ, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Puisque $\varphi(k) \geq k$, pour tout $k \geq N$, on a $\varphi(k) \geq N$ et donc

$$|v_k - \ell| = |u_{\varphi(k)} - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi, $v_k \to \ell$. Donc toute suite extraite de (u_n) converge vers la même limite. ∎

◃ **Remarque 2.11.**

1. la proposition précédente se généralise aux suites qui admettent une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire une limite finie ou infinie).
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors pour tout entier $p \geq 1$ fixé, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+p} = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{np} = \ell.$$

Corollaire 2.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
S'il existe deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui admettent des limites différentes, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, c'est-à-dire qu'elle n'admet pas de limite.

Preuve.
Supposons qu'il existe deux applications strictement croissantes φ et ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que les suites extraites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ admettent respectivement les limites ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$.
Montrons que (u_n) n'a pas de limite en raisonnant par l'absurde. Supposons que (u_n) admette une limite ℓ (finie ou infinie). D'après la proposition précédente, les suites extraites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ auraient alors également ℓ pour limite.
Par unicité de la limite, on aurait $\ell_1 = \ell = \ell_2$, ce qui contredit $\ell_1 \neq \ell_2$. Ainsi, (u_n) ne peut pas avoir de limite, ce qui achève la preuve. ■

▹ **Exemple 2.8.**
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n$.
La suite extraite (u_{2n}) converge vers 1 (c'est la suite constante égale à 1) et la suite extraite (u_{2n+1}) converge vers -1.
Ainsi, il existe deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ont des limites distinctes. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 2.4
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Prouver que :
$$\forall n \geq 1, \quad u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}.$$
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

V Théorèmes fondamentaux sur la convergence des suites

1 Convergence des suites monotones

Théorème 2.3 [Théorème de la limite monotone]

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle monotone.

1. Si la suite (u_n) est **croissante** et **majorée**, alors elle est convergente dans $\mathbb{R}$ et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
2. Si la suite (u_n) est **décroissante** et **minorée**, alors elle est convergente dans $\mathbb{R}$ et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Preuve.

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle **croissante** et **majorée**. Considérons l'ensemble des termes de la suite :

$$A := \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Alors A est **non vide** et **majoré**. D'après l'axiome de la borne supérieure, A admet une **borne supérieure** que l'on note :

$$L := \sup(A) \in \mathbb{R}.$$

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$: Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$L - \varepsilon < u_N \leq L.$$

Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq N$, on a

$$u_N \leq u_n \leq L \implies L - \varepsilon < u_n \leq L.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

et par conséquent $u_n \to L$.

2. Si (u_n) est **décroissante** et **minorée**, on applique le même raisonnement à la suite (v_n) définie par $v_n = -u_n$, qui est croissante et majorée. La limite de u_n est alors $\inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

■

◃ **Remarque 2.12.** ⚠

1. Si une suite (u_n) est **croissante** et **majorée**, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

2. Si une suite (u_n) est **décroissante** et **minorée**, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

3. Une suite croissante **non majorée** diverge vers $+\infty$.
4. Une suite décroissante **non minorée** diverge vers $-\infty$.

2 Convergence des suites géométriques $(q^n)_n$

Proposition 2.12

Soit $q \in \mathbb{R}$ et considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n.$$

On s'intéresse à la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$. On distingue plusieurs cas :

1. $$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |q| < 1, \\ 1 & \text{si } q = 1, \\ +\infty & \text{si } q > 1. \end{cases}$$
2. Si $q \leq -1$, la suite $(q^n)_n$ n'admet pas de limite.

◃ **Remarque 2.13.** ⚠

Si q dépend de n, alors le résultat précédent n'est plus forcément valable. Par exemple, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$.

3 Suites adjacentes

Définition 2.9

Deux suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont dites **adjacentes** si elles vérifient les conditions suivantes :

1. $(u_n)_n$ est croissante.
2. $(v_n)_n$ est décroissante.
3. la suite $(v_n - u_n)_n$ tend vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 2.4

Si deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont **la même limite**. De plus, en notant cette limite commune ℓ, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Preuve.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = v_n - u_n$. La suite (w_n) est décroissante car :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \leq 0.$$

Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell.$$

De même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge vers une limite $\ell' \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq \ell'.$$

Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, on a :

$$\ell' - \ell = \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0,$$

Par conséquent,

$$\ell = \ell'.$$

Ainsi, (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

■

▹ **Exemple 2.9.**
Considérons les suites définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

— La suite (u_n) est **croissante**. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

— La suite (v_n) est **décroissante**. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0.$$

— Enfin :

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**. Elles convergent toutes les deux vers la même limite ℓ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

4 Suites de Cauchy

Pour exprimer qu'une suite converge sans connaître sa limite à l'avance, on adopte une autre approche : au lieu de dire que les termes de la suite se rapprochent d'une certaine limite ℓ, on dira qu'ils se rapprochent les uns des autres. Cette idée conduit naturellement à la notion fondamentale de suite de Cauchy [1]

Définition 2.10 [Suite de Cauchy]

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels (ou complexes) est dite **suite de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m, n \geq N, \quad |u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

◃ **Remarque 2.14.**

1. La condition précédente s'écrit aussi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \; n \geq N \implies |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

2. L'intérêt principal de la définition est de caractériser la convergence sans connaître explicitement la limite.

Proposition 2.13

1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est elle-même une suite de Cauchy.
3. Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve.

1. Soit (u_n) une suite convergente de limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe un entier N tel que :
$$n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Alors, pour tous entiers $p, q \geq N$, on a par l'inégalité triangulaire :
$$|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Ainsi, (u_n) est une suite de Cauchy.
2. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$p, q \geq N \implies |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

1. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français, fondateur de l'analyse moderne, connu pour ses travaux sur les équations différentielles et la mécanique de l'élasticité.

Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n). On a $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \varphi(n) \geq n$. Ainsi, si $p, q \geq N$, alors $\varphi(p), \varphi(q) \geq N$, et donc :

$$|u_{\varphi(p)} - u_{\varphi(q)}| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que $(u_{\varphi(n)})$ est également une suite de Cauchy.

3. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Prenons $\varepsilon = 1$. Il existe alors un entier N tel que :

$$p, q \geq N \implies |u_p - u_q| \leq 1.$$

En particulier, pour tout $n \geq N$, on a :

$$|u_n| \leq |u_N| + 1.$$

Posons

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq M$, ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée.

■

▹ **Exemple 2.10.**
La suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

n'est pas convergente, car elle n'est pas de Cauchy. En effet :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{2n} - u_n| &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\geq n \times \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) n'est pas de Cauchy, donc elle diverge.

Lemme 2.2

Soit (u_n) une suite de Cauchy. Supposons que (u_n) admette une suite extraite convergente, de limite ℓ. Alors la suite (u_n) est elle-même convergente et a pour limite ℓ.

Preuve.
Puisque (u_n) est de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_1 tel que :

$$p, q \geq N_1 \implies |u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ, donc il existe un entier N_2 tel que :

$$n \geq N_2 \implies |u_{\varphi(n)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La fonction φ étant strictement croissante, on a $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Choisissons alors un entier

$$m \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

Ainsi, on a simultanément

$$\varphi(m) \geq m \geq N_1 \quad \text{et} \quad \varphi(m) \geq m \geq N_2.$$

Pour tout $p \geq N_1$, on applique l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |u_p - \ell| &\leq |u_p - u_{\varphi(m)}| + |u_{\varphi(m)} - \ell| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_1$ tel que $p \geq N$ entraîne $|u_p - \ell| < \varepsilon$.
Autrement dit, la suite (u_n) converge vers ℓ. ■

Le théorème suivant offre un outil efficace pour démontrer l'existence de la limite d'une suite, sans avoir besoin de connaître préalablement sa valeur. Avant d'énoncer ce théorème, nous rappelons le théorème de Bolzano[2]-Weierstrass[3], qui affirme que toute suite bornée de réels possède une sous-suite convergente. Ce résultat constitue une étape clé pour mettre en évidence la propriété de complétude de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.5 [Bolzano- Weierstrass]

Dans $\mathbb{R}$, toute suite bornée possède au moins une suite extraite convergente.

◃ **Remarque 2.15.** ⚠
Le théorème de Bolzano-Weierstrass n'affirme pas qu'une suite réelle bornée converge ! Il garantit seulement qu'il est possible d'en extraire une sous-suite convergente.

Théorème 2.6

Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente.

Preuve.
Soit (u_n) une suite réelle. On procède en plusieurs étapes :

- Puisque (u_n) est de Cauchy, elle est bornée.
- D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite bornée possède une sous-suite convergente.
- Soit $(u_{\varphi(k)})$ une sous-suite de (u_n) convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par la définition de la convergence d'une suite, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$:

$$|u_{\varphi(k)} - \ell| < \varepsilon.$$

- Comme (u_n) est Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N$:

$$|u_n - u_m| < \varepsilon.$$

- Choisissons $k_0 \geq K$ tel que $\varphi(k_0) \geq N$. Alors pour tout $n \geq N$:

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(k_0)}| + |u_{\varphi(k_0)} - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi, (u_n) converge vers ℓ. ■

◃ **Remarque 2.16.**

1. On peut démontrer que dans $\mathbb{C}$ également toute suite de Cauchy est convergente.
2. On traduit le résultat du théorème et de la remarque ci-dessus en disant que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces vectoriels **complets**.

2. Bolzano Bernard (1781-1848) : Mathématicien et philosophe bohémien de langue et de culture allemandes.
3. Weierstrass Karl Theodor (1815-1897) : Mathématicien allemand.

VI Suites récurrentes

1 Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

Définition 2.11 [Suite arithmétique]

Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est dite **arithmétique** s'il existe un réel r, appelé la raison de la suite, tel que :

$$\forall n \in I, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Propriété 2.1

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr, \quad$ ou plus généralement, $\quad \forall p, n \in I, \quad u_n = u_p + (n-p)r.$
2. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq p$. On a $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = \dfrac{u_p + u_n}{2} \times (n - p + 1).$
3. — Si $r > 0$, la suite $(u_n)_n$ est croissante.
   — Si $r < 0$, la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
   — Si $r = 0$, la suite $(u_n)_n$ est constante.

Preuve.
À titre d'exercice. ■

Définition 2.12 [Suite géométrique]

Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est dite **géométrique** s'il existe un réel q, appelé la raison de la suite, tel que :

$$\forall n \in I, \quad u_{n+1} = q\, u_n.$$

Propriété 2.2

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite géométrique de raison q.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n, \quad$ ou plus généralement, $\quad \forall p, n \in I, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$
2. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq p$.
   — Si $q \neq 1$, alors
   $$S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$
   — Si $q = 1$, alors
   $$S_n = (n - p + 1) \times u_p.$$

Preuve.
À titre d'exercice. ■

Définition 2.13 [Suite arithmético-géométrique]

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a\, u_n + b.$$

◃ **Remarque 2.17.**

1. Si $a = 1$, la relation devient $u_{n+1} = u_n + b$: la suite (u_n) est alors **arithmétique** de raison b.
2. Si $b = 0$, la relation devient $u_{n+1} = a\,u_n$: la suite (u_n) est alors **géométrique** de raison a.
3. Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$, la suite (u_n) est véritablement **arithmético-géométrique**.

Propriété 2.3

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la relation :

$$u_{n+1} = a\,u_n + b, \quad u_0 \in \mathbb{R}.$$

Si $a \neq 1$, la suite (u_n) peut s'écrire sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

Preuve.
À titre d'exercice. ■

2 Suites récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans ce qui suit, f désigne une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles. On étudie la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Définition 2.14

On dit qu'un intervalle J est **stable par** f si

$$f(J) \subset J.$$

◃ **Remarque 2.18.**
Pour montrer qu'un intervalle J est stable par f, on peut procéder de deux manières :

1. étudier la fonction f et déduire la stabilité à partir de son tableau de variations ;
2. utiliser directement des inégalités pour vérifier que $f(J) \subset J$.

Proposition 2.14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $J \subset I$ un intervalle stable par f. Si $u_0 \in J$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in J.$$

Preuve.
La preuve se fait de manière immédiate par récurrence. ■

On peut déduire la monotonie de la suite (u_n) à partir du caractère croissant ou décroissant de la fonction f sur un intervalle stable I.

Proposition 2.15 [Monotonie d'une suite récurrente]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et I un intervalle stable par f. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$.

1. Si f est **croissante** sur I, alors la suite (u_n) est monotone :

— si $u_1 \geq u_0$, la suite (u_n) est **croissante** ;
— si $u_1 \leq u_0$, la suite (u_n) est **décroissante**.

2. Si f est **décroissante** sur I, alors la suite (u_n) n'est pas monotone, mais les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont chacune monotone et de sens contraire.

Preuve.
Preuve donnée lors de la séance du cours. ■

Proposition 2.16

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I stable par f, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Si f est **continue** sur I et si (u_n) **converge** vers $\ell \in I$, alors

$$f(\ell) = \ell.$$

On dit que ℓ est un **point fixe** de f.

Exercice 2.5
Étudier la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N} :\quad u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

3 Limites et continuité

I Rappel

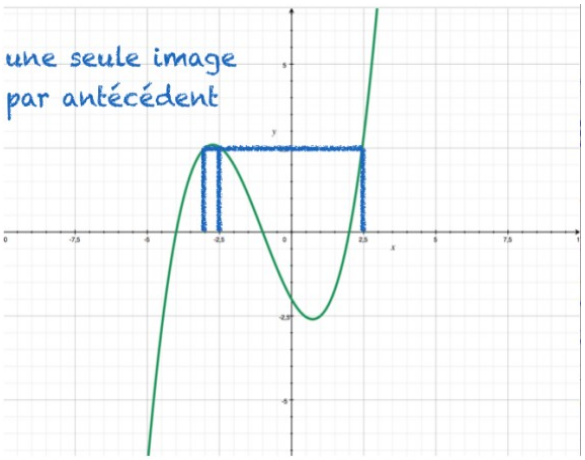
Définition 3.1 [Fonction numérique]

Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$.
Une **fonction numérique** f de I dans J est une relation qui, à chaque élément $x \in I$ appelé **antécédent**, associe au plus un élément $y \in J$ appelé **image**, que l'on note $y = f(x)$.
On la représente par :

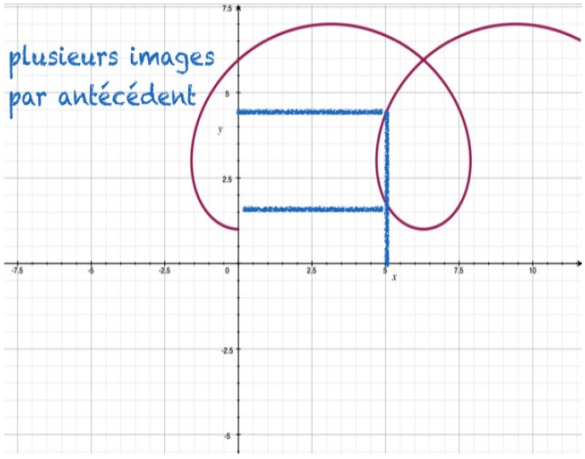
$$\begin{array}{rcl} f : I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Si $I = D_f$ (le domaine de définition de f), alors f devient une **application** de D_f dans J.

◃ **Remarque 3.1.**
Le fait que chaque élément de I possède au plus une image dans J signifie que certains éléments de I peuvent ne pas avoir d'image du tout dans J. D'un autre côté, cela implique également qu'aucun élément de I ne peut avoir plus d'une image dans J. Cette propriété est très importante et nous la verrons concrètement lorsque nous tracerons le graphe d'une fonction.



(a) Fonction



(b) Pas fonction

Définition 3.2 [Voisinage]

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite **voisinage** de x s'il existe un réel strictement positif $r > 0$ tel que
$$]x - r, x + r[\subset A.$$
2. Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite **voisinage de** $+\infty$ si elle contient un intervalle de la forme $]M, +\infty[$, autrement dit,
$$\exists M > 0, \quad]M, +\infty[\subset A.$$
3. Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite **voisinage de** $-\infty$ si elle contient un intervalle de la forme $]-\infty, M[$, autrement dit,
$$\exists M < 0, \quad]-\infty, M[\subset A.$$

▹ **Exemple 3.1.**

1. L'ensemble $A = [2, 5]$ est un voisinage de $x = 3$ (il suffit de prendre $r = \frac{1}{2}$), mais pas de $a = 2$ ou $a = 5$.

2. Tout intervalle de la forme $]c,d[$ est un voisinage de chacun de ses points.
   En effet, pour $a \in]c,d[$, il suffit de prendre $r = \frac{1}{2}\min(a-c, d-a)$.
3. $[-5, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.
4. $]-\infty, 3[$ est un voisinage de $-\infty$.

Définition 3.3 [Intérieur d'une partie]

Soit $A \subset \mathbb{R}$. L'**intérieur** de A, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points $x \in A$ pour lesquels il existe un voisinage entièrement contenu dans A :

$$x \in \mathring{A} \iff \exists r > 0,\ ]x-r, x+r[\subset A.$$

Autrement dit, x est un point intérieur de A s'il est "entouré" par des points de A.

▹ **Exemple 3.2.**

1. Pour $A = [2,5]$, l'intérieur est $\mathring{A} =]2,5[$.
2. Pour $A =]0,1] \cup \{2\}$, l'intérieur est $\mathring{A} =]0,1[$.
3. L'intérieur de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ lui-même.
4. L'intérieur d'un singleton $A = \{a\}$ est vide, $\{\mathring{a}\} = \varnothing$, car aucun voisinage de a est entièrement contenu dans $\{a\}$.

Définition 3.4 [Adhérence d'une partie]

Soit $A \subset \mathbb{R}$. L'**adhérence** de A, notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ tels que tout voisinage de x rencontre A, c'est-à-dire :

$$x \in \overline{A} \iff \forall r > 0,\ ]x-r, x+r[\cap A \neq \varnothing.$$

▹ **Exemple 3.3.**

1. Pour $A =]0,2[$, $\overline{A} = [0,2]$.
2. Pour $C = [1,3] \cup \{4\}$, $\overline{C} = [1,3] \cup \{4\}$.
3. Pour $D = \varnothing$, $\overline{D} = \varnothing$.

II Limite d'une fonction

1 Définitions et propriétés

Définition 3.5 [Limite finie en un point]

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$ et $L \in \mathbb{R}$. On dit que f **admet pour limite** L **en** a, et l'on écrit

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L,$$

si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in D,\ 0 < |x-a| < \alpha \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

◃ **Remarque 3.2.**

1. $a \in \overline{D}$ garantie que l'intersection $D \cap]a-\alpha, a+\alpha[\neq \emptyset$.
2. Cette définition exprime l'idée que $f(x)$ s'approche de L lorsque x s'approche de a, tout en restant dans un voisinage de a.
3. L'existence et la valeur de la limite ne dépendent que du comportement de f au voisinage de a, c'est-à-dire des valeurs de f pour x proches de a.

4. La définition de la limite est indépendante du fait que f soit définie ou non en a (autrement dit, la valeur éventuelle $f(a)$ n'intervient pas dans la définition).

Proposition 3.1 [Unicité de la limite]

La limite d'une fonction, lorsqu'elle existe, est unique.

Preuve.
Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ et $\lim_{x\to a} f(x) = L'$. Montrons que $L = L'$.
Pour $\varepsilon > 0$, d'après la définition de la limite, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \in D \cap]a-\alpha_1, a+\alpha_1[\setminus\{a\}), \quad |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in D \cap]a-\alpha_2, a+\alpha_2[\setminus\{a\}), \quad |f(x)-L'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Pour tout $x \in D \cap]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\})$, on a donc :

$$|L-L'| \le |L-f(x)| + |f(x)-L'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, $|L-L'| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui implique que $L = L'$. ■

Propriété 3.1

Soient f une fonction définie sur un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D. Alors, pour tout réel L, on a :

1. $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a}(f(x)-L) = 0.$
2. $\lim_{x\to a} f(x) = L \implies \lim_{x\to a} |f(x)| = |L|.$
3. $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$

Preuve.
Preuve analogue à celle des suites étudiées au chapitre 2. ■

▹ **Exemple 3.4.** On souhaite démontrer que

$$\lim_{x\to 1}(x^2+2x) = 3.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\alpha > 0$ tel que, pour tout x vérifiant $0 < |x-1| < \alpha$, on ait

$$|(x^2+2x)-3| < \varepsilon.$$

On simplifie l'expression :

$$|(x^2+2x)-3| = |x^2+2x-3| = |(x-1)(x+3)|.$$

Pour contrôler le facteur $|x+3|$, on se restreint à un voisinage de 1. Supposons $|x-1| < 1$. Alors $x \in]0,2[$, donc

$$3 < x+3 < 5 \quad \Rightarrow \quad |x+3| < 5.$$

On a alors

$$|(x-1)(x+3)| \le 5\,|x-1|.$$

Pour obtenir $|(x-1)(x+3)| < \varepsilon$, il suffit d'avoir

$$5\,|x-1| < \varepsilon \quad \text{soit} \quad |x-1| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

On doit donc satisfaire simultanément :

$$|x-1|<1 \quad \text{et} \quad |x-1|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

Un choix convenable est :

$$\alpha = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right).$$

Ainsi, pour tout x tel que $0<|x-1|<\alpha$, on a bien $|x^2+2x-3|<\varepsilon$, ce qui prouve la limite.

Définition 3.6 [Limite à droite et limite à gauche]

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que f possède une limite $L \in \mathbb{R}$ **à droite en** a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in D \text{ vérifiant } a < x < a+\alpha, \text{ on ait } |f(x)-L|<\varepsilon.$$

Dans ce cas, on écrit :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

2. On dit que f possède une limite L **à gauche en** a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in D \text{ vérifiant } a-\alpha < x < a, \text{ on ait } |f(x)-L|<\varepsilon.$$

Dans ce cas, on écrit :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

◃ **Remarque 3.3.**
La notion de limite à droite (respectivement à gauche) en a n'a de sens que si a est adhérent à $D \cap]a, +\infty[$ (respectivement à $D \cap]-\infty, a[$).

Théorème 3.1

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Alors, pour tout $L \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ et } \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Preuve.
($\Rightarrow$) Supposons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in D,\ 0<|x-a|<\alpha \implies |f(x)-L|<\varepsilon.$$

Si $x \in D$ satisfait $a < x < a+\alpha$, alors $0<|x-a|<\alpha$, d'où $|f(x)-L|<\varepsilon$. Cela correspond précisément à la définition de

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

De même, si $x \in D$ vérifie $a-\alpha < x < a$, alors $|f(x)-L|<\varepsilon$, ce qui donne

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

($\Leftarrow$) Supposons que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

— Il existe $\alpha_- > 0$ tel que

$$\forall x \in D, \quad a-\alpha_- < x < a \implies |f(x)-L|<\varepsilon.$$

— Il existe $\alpha_+ > 0$ tel que

$$\forall x \in D, \quad a < x < a + \alpha_+ \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_-, \alpha_+)$. Alors, pour tout $x \in D$ tel que

$$0 < |x - a| < \alpha,$$

on est soit dans le cas $x < a$, soit dans le cas $x > a$. Dans les deux situations, on a

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in D,\ 0 < |x - a| < \alpha \implies |f(x) - L| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. ■

▹ **Exemple 3.5.** Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = E(x).$$

Nous cherchons à déterminer s'il existe une limite de f en $x = 1$.

Limite à gauche. Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $E(x) = 0$. Par conséquent,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0.$$

Limite à droite. Pour tout $x \in [1, 2[$, on a $E(x) = 1$. Ainsi,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1.$$

Les limites à gauche et à droite étant différentes, la fonction f ne possède donc pas de limite en $x = 1$.

Définition 3.7 [Limite infinie]

1. On dit que f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a si :

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D,\ \Big(|x - a| < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < -A)\Big).$$

On note alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty).$$

2. On dit que f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D,\ \Big(x > \alpha \ \Rightarrow\ f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < -A)\Big).$$

On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty).$$

3. On dit que f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $-\infty$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D,\ \Big(x < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < -A)\Big).$$

On note alors

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty).$$

◃ **Remarque 3.4.**
Selon le contexte, D peut contenir un voisinage de a ou être non borné si l'on considère les limites en $+\infty$ ou $-\infty$. La définition ci-dessus reste valable quel que soit le cas.

▹ **Exemple 3.6.**

Montrons que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $A > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $x > A$, on ait

$$\frac{1}{x^2} < \varepsilon.$$

Pour $x > 0$, l'inégalité $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$ est équivalente à $x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.
Posons donc

$$A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x > A$, on a bien

$$\frac{1}{x^2} < \varepsilon.$$

Ainsi, par définition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Proposition 3.2

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$.
Si f admet une limite L **finie** en un point a (où $a \in \overline{D}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$), alors f est bornée au voisinage de a.

Preuve.
Preuve donnée lors de la séance du cours. ■

◃ **Remarque 3.5.** ⚠
La réciproque de cette proposition est fausse, comme le montre l'exemple suivant. Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'admet pas de limite en 0.

La définition de la limite d'une fonction en un point peut se formuler en termes de suites convergentes.

Proposition 3.3 [Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction]

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$, $L \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$
2. Pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de D telle que $x_n \to a$, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers L.

Preuve.
(1) $\Rightarrow$ **(2)** : Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ et soit $(x_n) \subset D$ telle que $x_n \to a$. Montrons que $f(x_n) \to L$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite de f, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ vérifiant $0 < |x - a| < \delta$, on ait

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Comme $x_n \to a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_n - a| < \delta$. Donc pour tout $n \geq N$, on a

$$|f(x_n) - L| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que $f(x_n) \to L$.

(2) $\Rightarrow$ **(1)** : Raisonnons par l'absurde. Supposons que f n'admette pas L comme limite en a.
Alors, par négation de la définition de la limite, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x_\delta \in D$ (dépendant de δ) vérifiant :

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{et} \quad |f(x) - L| \geq \varepsilon_0.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $\delta = \frac{1}{n}$. Il existe alors $x_n \in D$ tel que :

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0.$$

Ainsi, nous obtenons une suite (x_n) d'éléments de D telle que $x_n \to a$ mais $f(x_n) \not\to L$, ce qui contredit (2). Cette contradiction prouve que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. ■

◃ **Remarque 3.6.**
La proposition reste valable lorsque $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

◃ **Remarque 3.7.** ⚠
Dans la pratique, on utilise souvent la version contraposée, en ce sens :
Si (x_n) et (y_n) convergent vers a et que les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ convergent vers des limites **différentes**, alors f **n'admet pas de limite** en a.

▹ **Exemple 3.7.**
La fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, n'admet pas de limite en 0.
En effet, considérons les suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. Or,

$$f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1 \quad \text{et} \quad f(y_n) = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$ et $\lim\limits_{n+\to\infty} f(y_n) = 0$. Comme ces deux limites sont différentes, f n'admet pas de limite en 0.

◃ **Remarque 3.8.** ⚠
Cette proposition est encore utile pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en a. Pour cela, il suffit de construire une suite (x_n) convergeant vers a telle que la suite $\left(f(x_n)\right)$ est divergente.

▹ **Exemple 3.8.**
La fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, n'admet pas de limite en 0. En effet, considérons la suite (x_n) définie par :

$$x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = (-1)^n$, qui est une suite divergente.

Proposition 3.4

Soient f et g deux fonctions définies sur un même voisinage de a (éventuellement en $+\infty$ ou $-\infty$).

(i) **Limite d'une somme**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R} + \infty$	$\ell \in \mathbb{R} - \infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

(ii) **Limite d'un produit**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$	$\ell \cdot \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.

(iii) **Limite d'un quotient (g ne s'annule pas au voisinage de a)**

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	0	$\ell' \neq 0$ ou $\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	0	F.I.	F.I.

◃ **Remarque 3.9.**
L'abréviation F.I. désigne une **forme indéterminée**. Cela signifie que, dans une telle situation, la limite peut prendre différentes valeurs (un nombre réel, $+\infty$, $-\infty$) ou même ne pas exister, selon les fonctions considérées.

2 Limites et ordre

Les résultats présentés dans cette section s'obtiennent par des démonstrations entièrement analogues à celles utilisées pour les suites dans le chapitre précédent.

Proposition 3.5

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, $L \in \mathbb{R}$, $(c,d) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

1. Si $c < L$, alors, au voisinage de a : $c < f(x)$
2. Si $L < d$, alors, au voisinage de a : $f(x) < d$
3. Si $c < L < d$, alors, au voisinage de a : $c < f(x) < d$

Preuve.

1. Comme $\lim_{x\to a} f(x) = L$, posons $\varepsilon = L - c > 0$.
   D'après la définition de la limite, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in D$ vérifiant $0 < |x-a| < \alpha_1$, on ait
   $$|f(x) - L| < L - c.$$
   Ceci implique
   $$-(L-c) < f(x) - L < L - c.$$
   En particulier,
   $$f(x) - L > -(L-c) = c - L,$$
   d'où $f(x) > c$.
2. De même, si $L < d$, on pose
   $$\varepsilon = d - L > 0.$$
   Par définition de la limite, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in D$ vérifiant $0 < |x-a| < \alpha_2$, on ait
   $$|f(x) - L| < d - L,$$
   ce qui implique
   $$f(x) - L < d - L \quad \Rightarrow \quad f(x) < d.$$
3. En posant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, on s'assure que pour tout $x \in D$ vérifiant $0 < |x-a| < \alpha$, on reste dans le voisinage de a où les deux conditions suivantes sont vérifiées simultanément, conformément à la définition de la limite :
   $$|f(x) - L| < L - c \quad \text{et} \quad |f(x) - L| < d - L.$$
   Ces inégalités donnent respectivement
   $$f(x) > c \quad \text{et} \quad f(x) < d,$$

et l'on conclut donc que

$$c < f(x) < d.$$

■

◃ **Remarque 3.10.** ⚠

1. Le même raisonnement s'applique pour les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Les hypothèses avec des inégalités strictes ($c < L$, etc.) sont essentielles et ne peuvent pas être affaiblies en inégalités larges ($c \leq L$, etc.). En effet, si $f(x) \to L$ lorsque $x \to a$ et $c \leq L$, il se peut que l'on n'ait pas $c \leq f(x)$ au voisinage de a comme le montre l'exemple suivant : $f(x) = x$, $a = 0$, $L = 0$, $c = 0$. On a bien $f(x) \to 0$ quand $x \to 0$ et $c = 0 \leq L = 0$, mais pour tout voisinage de 0, il existe $x < 0$ tel que $f(x) = x < 0 = c$.

Proposition 3.6

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, $L \in \mathbb{R}$, $(c,d) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

1. Si $f(x) > c$ (ou $f(x) \geq c$) au voisinage de a, alors $L \geq c$.
2. Si $f(x) < d$ (ou $f(x) \leq d$) au voisinage de a, alors $L \leq d$.
3. Si $c < f(x) < d$ (ou $c \leq f(x) \leq d$) au voisinage de a, alors $c \leq L \leq d$.

◃ **Remarque 3.11.**
Lorsque l'on passe à la limite, les inégalités strictes se transforment en inégalités larges sur la limite.

Proposition 3.7 [Théorème des gendarmes]

Soient $a \in D$ et $L \in \mathbb{R}$. Supposons que $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ vérifient, au voisinage de a,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

et que

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L.$$

Alors la limite de f en a existe et on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

◃ **Remarque 3.12.**
Ce résultat reste valable lorsque $x \to +\infty$ ou bien $x \to -\infty$.

Corollaire 3.1

Soient $a \in D$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$.

1. Si $|f(x)| \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
2. Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

▹ **Exemple 3.9.**
Calculons

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

On remarque que $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée sur $\mathbb{R}^*$ et que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.
Par conséquent, le corollaire précédent s'applique et permet de conclure immédiatement que

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Proposition 3.8

Soit $a \in D$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors
$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty.$$
2. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ et si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

III Notion de continuité

Dans toute la suite, f désignera une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

1 Continuité en un point

Définition 3.8 [Continuité en un point]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est continue en a si
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
En abrégé :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

▹ **Exemple 3.10.**
La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en $a \in \mathbb{R}_+^*$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, on a
$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$
Ainsi, pour que $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, il suffit d'imposer
$$\frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-a| < \varepsilon\sqrt{a}.$$
On choisit donc
$$\delta = \varepsilon\sqrt{a}.$$
Alors, pour tout x tel que $|x-a| < \delta$, on a bien $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, ce qui montre que f est continue en a.

Définition 3.9 [Continuité à droite et à gauche en un point]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est :

1. **continue à droite en** a si
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a);$$
2. **continue à gauche en** a si
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

▹ **Exemple 3.11.**
La fonction partie entière $E(.)$ est continue à droite en tout point $p \in \mathbb{Z}$, mais n'est pas continue à gauche. En effet, pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$:

— Si $x \in [p, p+1[$, alors $E(x) = p$. Ainsi,

$$\lim_{x \to p^+} E(x) = p = E(p),$$

et $E(.)$ est continue à droite en p.

— Si $x \in [p-1, p[$, alors $E(x) = p-1$. Donc

$$\lim_{x \to p^-} E(x) = p - 1 \neq E(p),$$

et $E(.)$ n'est pas continue à gauche en p.

Proposition 3.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$ (l'intérieur de I).
Alors f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a, c'est-à-dire :

$$f \text{ continue en } a \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \text{ et } \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Preuve.
Ceci découle directement des propriétés des limites à droite et à gauche d'une fonction donnée. ■

Définition 3.10 [Points de discontinuité]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$.

1. On dit que f présente une **discontinuité de première espèce** en a, si les limites à gauche et à droite existent et sont finies, mais sont **différentes** :
$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x).$$
2. On dit que f présente une **discontinuité de deuxième espèce** en a, si au moins une des limites à droite ou à gauche n'existe pas ou est infinie.
3. On dit que $b \in \mathbb{R}$ est un **point de discontinuité éliminable** si :
   (a) La limite $\lim_{x \to b} f(x)$ existe et est finie.
   (b) Soit f n'est pas définie en b, soit f est définie en b mais $\lim_{x \to b} f(x) \neq f(b)$.

◃ **Remarque 3.13.**
Pour une **discontinuité de première espèce**,on appelle le **saut** de f en a le réel :

$$\delta_a(f) = \lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x).$$

En particulier, si f est continue en a, alors $\delta_a(f) = 0$.

▹ **Exemple 3.12.**

1. La fonction partie entière $E(.)$ présente une **discontinuité de première espèce** en tout entier $p \in \mathbb{Z}$, car elle est continue à droite et à gauche en $p \in \mathbb{Z}$, mais
$$\lim_{x \to p^-} E(x) = p - 1 \neq \lim_{x \to p^+} E(x) = p.$$
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
présente une **discontinuité de deuxième espèce** en $x = 0$, car les limites à gauche et à droite n'existent pas.

3. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$

Alors,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Comme f n'est pas définie en 0, le point 0 est un **point de discontinuité éliminable**.

Le concept de **prolongement par continuité** repose sur le traitement des **discontinuités éliminables**. Si a est un tel point pour une fonction f, on peut définir ou ajuster la valeur de f en a pour rendre la fonction continue en ce point. La définition suivante formalise cette idée.

Définition 3.11 [Prolongement par continuité]

Soit f une fonction et a un point de discontinuité éliminable. Posons

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

On définit la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ L, & x = a, \end{cases}$$

qui est continue en a. La fonction g s'appelle le **prolongement par continuité** de f en a.

◃ **Remarque 3.14.** ⚠
Si la limite $\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe pas ou est infinie, on dit que f n'est pas **prolongeable par continuité** en a.

▹ **Exemple 3.13.**
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

La limite en 0 existe et vaut 0, donc f est **prolongeable par continuité** en 0.
En posant $f(0) = 0$, on obtient le **prolongement par continuité** de f en 0, noté g :

$$g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

qui est bien continue en 0.

Proposition 3.10

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, et soit $a \in I$.

1. Si f et g sont continues en a, il en est de même pour $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ et $\frac{f}{g}$ (lorsque $g(a) \neq 0$).
2. Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Preuve.
À titre d'exercice. ■

Proposition 3.11 [Caractérisation séquentielle de la continuité]

La fonction f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Preuve.
Il s'agit d'une conséquence immédiate de la caractérisation de la limite par les suites : en remplaçant la limite L par $f(a)$, on retrouve exactement l'énoncé de la continuité. ■

◃ **Remarque 3.15.** ⚠

1. En pratique, cette proposition est très utile dans la situation suivante : on dispose d'une suite définie par une relation de récurrence du type $x_{n+1} = f(x_n)$; si (x_n) converge vers L et si f est continue en L, alors nécessairement $f(L) = L$.
2. Cette proposition est spécialement utile pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point. Il suffit pour cela de construire une suite (x_n) d'éléments de I telle que
$$x_n \longrightarrow a \qquad \text{mais} \qquad f(x_n) \not\longrightarrow f(a).$$
3. Une autre méthode consiste à exhiber deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de I telles que
$$x_n \to a, \quad y_n \to a, \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n).$$

▹ **Exemple 3.14.**

1. La fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
est discontinue en 0. Considérer la suite (x_n) définie par $x_n = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$.
2. La fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
est discontinue en 0. Considérer les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ et $y_n = \dfrac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$.

2 Continuité sur un intervalle

Définition 3.12

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en tout point de I.

▹ **Exemple 3.15.**

1. Si f et g sont deux fonctions continues sur I, alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les fonctions $\alpha f \pm \beta g$ et $f \cdot g$ sont continues sur I.
2. Si f et g sont continues sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.
3. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
4. Les fonctions rationnelles (quotient de deux polynômes) sont continues sur chaque intervalle inclus dans leur domaine de définition.
5. Les fonctions usuelles $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \tan(x)$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ sont continues sur chaque intervalle inclus dans leur domaine.
6. Si f est continue sur I, alors la restriction de f à tout intervalle $J \subset I$ est continue sur J.

◃ **Remarque 3.16.**

1. L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ constitue un espace vectoriel réel que l'on note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
2. Pour démontrer qu'une fonction est continue sur I, on ne revient pratiquement jamais à la définition epsilonesque (c'est-à-dire avec ε). Le plus souvent, la fonction à étudier est un cocktail de fonctions continues usuelles et les propriétés précédentes permettent de conclure.

Définition 3.13 [Continuité par morceaux]

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux sur** $[a,b]$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ et :

1. f est continue sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ pour $i = 0, \ldots, n-1$;
2. f admet une limite finie à droite en a_i et à gauche en a_{i+1} pour chaque $i = 0, \ldots, n-1$.

▹ **Exemple 3.16.**
La fonction partie entière est continue par morceaux sur $[-1, 3]$.

3 Résultats fondamentaux sur les fonctions continues

Définition 3.14 [Rappel]

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :

1. **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in D$, on ait
$$f(x) \leq M;$$
2. **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in D$, on ait
$$f(x) \geq m;$$
3. **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

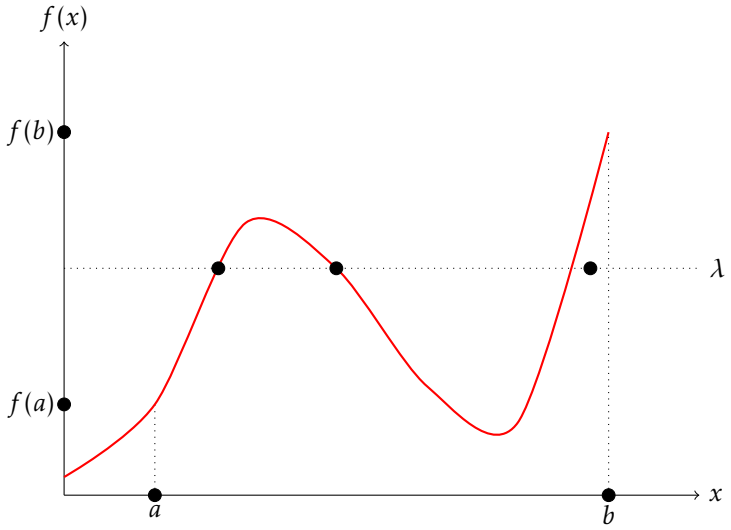
◃ **Remarque 3.17.**

1. Si f est majorée, on appelle **borne supérieure** de f le réel
$$\sup_D f = \sup\{ f(x) \mid x \in D \}.$$
2. Si f est minorée, on appelle **borne inférieure** de f le réel
$$\inf_D f = \inf\{ f(x) \mid x \in D \}.$$
3. On dit que f admet un **maximum** en un point $x_0 \in D$ si
$$f(x_0) = \sup_D f,$$
et dans ce cas on écrit
$$\max f = f(x_0).$$
4. On dit que f admet un **minimum** en un point $x_0 \in D$ si
$$f(x_0) = \inf_D f,$$
et dans ce cas on écrit
$$\min f = f(x_0).$$

◃ **Remarque 3.18.**
Les bornes $\sup_D f$ et $\inf_D f$ ne sont que les bornes de l'ensemble $f(D) \subset \mathbb{R}$. On utilise simplement les propriétés introduites au Chapitre 1, sans avoir besoin de résultats nouveaux : on applique exactement celles déjà établies pour les ensembles de réels.

Théorème 3.2 [Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)]

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b dans I avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur I.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists c \in [a,b]$ (non unique en général) tel que $f(c) = \lambda$.



Corollaire 3.2

On utilise souvent le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où $\lambda = 0$, autrement dit, Si f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, alors

$$\exists\, c \in [a,b] \quad \text{tel que} \quad f(c) = 0.$$

▹ **Exemple 3.17.**

1. L'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ possède au moins une solution dans $\mathbb{R}_+$.
   En effet, considérons la fonction f définie par $f(x) = x^{17} - x^{11} - 1$. Elle est continue sur $\mathbb{R}^+$, et de plus :
   $$f(0) = -1 < 0, \quad f(2) = 2^{17} - 2^{11} - 1 > 0.$$
   D'où $\exists\, c \in]0,2[\subset \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) = 0$.
2. L'équation $e^{-x} = x$ possède au moins une solution dans $]0,1[$.

Exercice 3.1
Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Corollaire 3.3

Image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Preuve.
Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ avec $y_1 < y_2$.
Il s'agit de montrer que tout élément λ de $[y_1, y_2]$ est un élément de $f(I)$. En effet :
Comme y_1 et y_2 sont dans $f(I)$, il existe a et b dans I tels que $f(a) = y_1$ et $f(b) = y_2$. Comme I est un intervalle, on a $[a,b] \subseteq I$.
Puisque f est continue sur $[a,b]$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\forall \lambda \in [y_1, y_2],\ \exists\, c \in [a,b] \quad \text{tel que} \quad f(c) = \lambda,$$

d'où $\lambda \in f(I)$. ■

◃ **Remarque 3.19.**
En général, l'image $f(I)$ et l'intervalle I ne sont pas de même nature, sauf si I est un segment.

Théorème 3.3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
Alors, f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes.

Preuve.

1. Montrons que f est bornée sur $[a,b]$.
   Supposons par l'absurde que f n'est pas bornée sur $[a,b]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $|f(x_n)| > n$.
   La suite (x_n) est bornée, car tous ses termes appartiennent à l'intervalle $[a,b]$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un point $c \in [a,b]$.
   Pour cette sous-suite, on a toujours $|f(x_{\varphi(n)})| > \varphi(n) \geq n$. Par conséquent,
   $$|f(x_{\varphi(n)})| \to +\infty \quad \text{quand } n \to +\infty.$$
   Or, f est continue en c, donc
   $$\lim_{n\to+\infty} |f(x_{\varphi(n)})| = |f(c)| < +\infty,$$
   ce qui est une contradiction.
   Ainsi, f est bornée sur $[a,b]$.
2. Montrons que f atteint ses bornes.
   Soit $M = \sup f([a,b])$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in [a,b]$ tel que
   $$M - \varepsilon < f(x) \leq M.$$
   En particulier, pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on peut choisir $x_n \in [a,b]$ tel que
   $$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M.$$
   La suite $(f(x_n))$ converge alors vers M par le théorème des gendarmes.
   Comme (x_n) est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass garantit l'existence d'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers $c \in [a,b]$. Par continuité de f, on a
   $$f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = M,$$
   ce qui montre que f atteint son maximum.
   De manière analogue, en posant $m = \inf f([a,b])$, on montre que f atteint également son minimum.

■

Corollaire 3.4

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'image $f([a,b])$ est un segment de $\mathbb{R}$:
$$f([a,b]) = [m,M],$$
où $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)]$ et $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

Preuve.
Ceci est immédiat d'après le corollaire et le théorème précédent. ■

◃ **Remarque 3.20.** ⚠
L'hypothèse de la continuité et celle du segment sont indispensables. Par exemple,

1. la fonction f définie par $f(x) = \tan(x)$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mais cet intervalle n'est pas un segment, et la fonction n'y est pas bornée.

2. De même, la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est définie sur un segment mais n'est pas continue en 0, et elle n'est pas bornée sur $[0,1]$.

Définition 3.15 [Fonctions réciproques]

Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans J. Si f est bijective, on dit qu'elle admet une fonction réciproque, notée $f^{-1} : J \to I$, vérifiant :

$$\forall x \in I,\ \forall\, y \in J, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Proposition 3.12

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est strictement monotone sur } I.$$

Preuve.
$\Leftarrow$) Il est clair que toute fonction strictement monotone est injective.
$\Rightarrow$ Réciproquement, supposons que f est injective et continue, et montrons qu'elle est strictement monotone. Supposons le contraire : il existe $x < y < z$ dans I tels que l'une des relations suivantes soit vraie :

$$(*)\ f(y) < f(x) \text{ et } f(y) < f(z) \quad \text{ou} \quad (**)\ f(x) < f(y) \text{ et } f(z) < f(y).$$

Si $(*)$ est vérifié, alors par la continuité de f et le TVI, il existe $c \in]y,z[$ tel que $f(c) = f(x)$, ce qui contredit l'injectivité de f. Le raisonnement est analogue si $(**)$ est vérifié. ■

Théorème 3.4 [Théorème de la bijection réciproque]

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors :

1. $f(I)$ est un intervalle.
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
3. La fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f.

▹ **Exemple 3.18.**

1. La fonction f définie par $f(x) = e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa fonction réciproque, notée f^{-1}, est définie pour tout $x > 0$ par $f^{-1}(x) = \ln(x)$.
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction f définie par $f(x) = x^\alpha$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa fonction réciproque est définie pour tout $x > 0$ par $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$.
3. La fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$. Sa fonction réciproque est notée arcsin.
4. La fonction $f(x) = \cos(x)$ est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Sa fonction réciproque notée arccos.
5. La fonction f définie par $f(x) = \tan(x)$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est notée arctan.

Définition 3.16 [Continuité uniforme]

Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est **uniformément continue** sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x, y \in I,\ |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

▹ **Exemple 3.19.**
La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur tout intervalle I de la forme $[A, +\infty[$, où $A > 0$. En effet, fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $x, y \in I$, on a $0 < \sqrt{A} \leq \sqrt{x}$ et $0 < \sqrt{A} \leq \sqrt{y}$. On en déduit

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{|x-y|}{2\sqrt{A}}.$$

Ainsi, $\dfrac{|x-y|}{2\sqrt{A}} < \varepsilon$ dès que $|x-y| < 2\varepsilon\sqrt{A}$.
D'où le choix $\alpha = 2\varepsilon\sqrt{A}$.

◃ **Remarque 3.21.** ⚠

1. Dans la définition de la continuité uniforme, le réel α ne dépend ni de x ni de y, mais seulement de ε, alors que dans la continuité en un point a, le réel α dépend généralement de ε et de a (voir la continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en $a \in \mathbb{R}_+^*$ dans l'exemple 3.10, où $\alpha = \varepsilon\sqrt{a}$).
2. La propriété de continuité uniforme est une propriété globale de la fonction sur tout l'intervalle. On ne peut pas parler de continuité uniforme d'une fonction en un point !

Théorème 3.5

Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.

Preuve.
Soit $a \in I$. Nous voulons montrer que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Puisque f est uniformément continue sur I, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x, y \in I,\ |x-y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

En particulier, en prenant $y = a$, il suit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

ce qui correspond exactement à la définition de la continuité de f en a.
Ainsi, f est continue en tout point de I. ■

◃ **Remarque 3.22.** ⚠
La réciproque n'est pas vraie en général, autrement dit, toute fonction continue sur un intervalle I n'est pas forcément uniformément continue. En effet, la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ mais elle n'y est pas uniformément continue. Il s'agit de montrer :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x, y \in]0,1],\ |x-y| < \alpha \text{ et } \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \geq \varepsilon.$$

Posons $\varepsilon = 1$. Soit $\alpha > 0$ et posons $x = \min\{1, \alpha\}$ et $y = \frac{x}{2}$.
On a alors $x, y \in]0,1]$. De plus :

$$|x-y| = \left|x - \frac{x}{2}\right| = \frac{x}{2} \leq \frac{\alpha}{2} < \alpha,$$

et

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right| = \frac{1}{x} \geq 1 = \varepsilon.$$

Théorème 3.6 [Théorème de Heine]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$.
Si f est continue sur $I = [a, b]$, alors f est uniformément continue sur I.

▹ **Exemple 3.20.**
La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. En effet :
— D'après l'exemple 3.19, f est uniformément continue sur $[A, +\infty[$ pour tout $A > 0$
— f est continue sur $[0, A]$
— D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0, A]$
Par conséquent, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 3.17 [Fonctions Lipschitziennes]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **Lipschitzienne** sur I si :

$$\exists k \in \mathbb{R}_+, \ \ \forall (x, y) \in I^2, \ \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Dans ce cas, on dit que f est k-Lipschitzienne sur I.

▹ **Exemple 3.21.**

1. $x \mapsto \sin(x)$ est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$
2. $x \mapsto |x|$ est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$
3. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est 1-Lipschitzienne sur $[1, +\infty[$

Proposition 3.13

Si f est k-Lipschitzienne sur I, alors f est uniformément continue sur I (et donc continue sur I).

Preuve.
f est Lipschitzienne sur $I \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}_+, \ \forall (x, y) \in I^2, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$
Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < (k + 1)|x - y|,$$

et $(k + 1)|x - y| < \varepsilon$ dès que $|x - y| < \frac{\varepsilon}{k+1}$.
Il suffit donc de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{k+1}$ dans la définition de la continuité uniforme. ■

◃ **Remarque 3.23.** ⚠

1. La réciproque de cette proposition est fausse. Une fonction peut être uniformément continue sans être Lipschitzienne.
2. Par contraposition : f non uniformément continue sur $I \Rightarrow f$ non Lipschitzienne sur I.
3. Les notions de continuité uniforme et de Lipschitzienne sont des notions globales (sur un intervalle). On ne peut pas parler de continuité uniforme ou de Lipschitzienne en un point !
4. Pour montrer qu'une fonction est uniformément continue sur I :
   — Si I est un segment, appliquer le théorème de Heine.
   — Vérifier si f est Lipschitzienne sur I.
   — Sinon, revenir à la définition avec ε et α.
5. La notion de fonction Lipschitzienne est plus facile à manipuler que celle d'une fonction uniformément continue, car dans sa définition, il n'apparaît ni ε ni δ, seulement une constante $k \in \mathbb{R}_+$.

4 Dérivation et fonctions circulaires

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité des chapitres précédents. Après avoir défini les fonctions et étudié leurs limites ainsi que leur continuité, nous abordons désormais un aspect central de l'analyse : la dérivation. Le développement de la théorie et des applications liées aux dérivées a connu un essor considérable depuis sa formalisation au XVII^{e} siècle par Leibniz et Newton.

I Dérivation

Dans toute cette section, I désigne un intervalle réel non vide et non réduit à un point (c'est-à-dire d'intérieur non vide).

1 Dérivabilité en un point

Définition 4.1 [Dérivabilité en un point]

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est **dérivable** au point a (ou en a), si la fonction

$$x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

admet une limite finie lorsque $x \to a$. Cette limite est appelée **le nombre dérivé** de f en a et est noté :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

▹ **Exemple 4.1.**

1. Toute fonction constante est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$, et son nombre dérivé en a est nul.
2. La fonction f définie sur $[0,+\infty)$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en tout point $a > 0$ avec

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

En revanche, f n'est pas dérivable en 0, car la limite du taux de variation tend vers l'infini lorsque $x \to 0^+$.

◃ **Remarque 4.1.**
La fonction f est dérivable en a si et seulement si la fonction

$$h \longmapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

admet une limite finie lorsque $h \to 0$. Dans ce cas, on a

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

On utilise fréquemment cette forme en pratique, car elle permet de calculer facilement le nombre dérivé.

Proposition 4.1 [Développement limité d'ordre 1]

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$.
2. Il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = f(a) + (x-a)L + (x-a)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Preuve.
Supposons que la limite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut L. Pour $x \neq a$, posons

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L.$$

Alors $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et on a

$$f(x) - f(a) = (x-a)L + (x-a)\varepsilon(x),$$

d'où

$$f(x) = f(a) + (x-a)L + (x-a)\varepsilon(x).$$

Réciproquement, si $f(x)$ s'écrit sous la forme

$$f(x) = f(a) + (x-a)L + (x-a)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0,$$

alors pour $x \neq a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L + \varepsilon(x),$$

et par passage à la limite lorsque $x \to a$, on obtient

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L.$$

■

Définition 4.2 [Dérivabilité à gauche et à droite]

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. Si $a \neq \inf(I)$, on dit que f est **dérivable à gauche** en a si la limite :

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existe et est finie. On note alors $f'_g(a)$ cette limite.

2. Si $a \neq \sup(I)$, on dit que f est **dérivable à droite** en a si la limite :

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existe et est finie. On note alors $f'_d(a)$ cette limite.

▹ **Exemple 4.2.**

1. La fonction valeur absolue est dérivable à droite et à gauche en 0. En effet,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

2. La fonction racine carrée n'est pas dérivable à droite en 0. En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Proposition 4.2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } a, \\ f \text{ est dérivable à gauche en } a, \\ f'_d(a) = f'_g(a). \end{cases}$$

◃ **Remarque 4.2.**
Cette proposition est particulièrement utile lorsque la fonction étudiée est définie par morceaux. En effet, pour vérifier la dérivabilité d'une telle fonction en un point a situé à la jonction de deux expressions, il suffit de calculer séparément le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite en ce point, puis de vérifier que ces deux valeurs coïncident. Lorsque ces nombres dérivés existent et sont égaux, la fonction est dérivable en a.

▹ **Exemple 4.3.**

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x-a| = \begin{cases} a-x & \text{si } x < a, \\ x-a & \text{si } x \geq a. \end{cases}$ n'est pas dérivable en a. En effet,

$$\lim_{x \to a^-} \frac{|x-a| - |a-a|}{x-a} = \lim_{x \to a^-} \frac{a-x}{x-a} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{|x-a| - |a-a|}{x-a} = \lim_{x \to a^+} \frac{x-a}{x-a} = 1.$$

Or, comme $f'_g(a) \neq f'_d(a)$, on en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en a.

Proposition 4.3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } a \Longrightarrow f \text{ continue en } a.$$

Preuve.
Si f est dérivable en a, le nombre dérivé

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. On peut alors écrire pour $x \neq a$:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a).$$

En prenant la limite quand $x \to a$, on obtient

$$\lim_{x \to a} \Big(f(x) - f(a) \Big) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

ce qui montre que f est continue en a. ■

◃ **Remarque 4.3.** ⚠
La réciproque est fausse en général : une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point.
Comme le montre l'exemple précédent, la fonction $f : x \longmapsto |x-a|$ $(a \in \mathbb{R})$ est continue en a mais non dérivable en a.

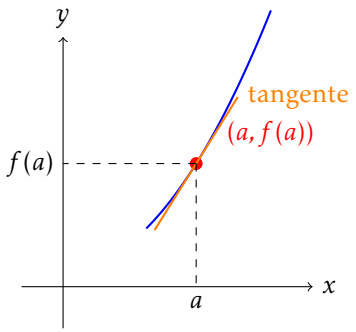
Définition 4.3 [Dérivabilité sur un intervalle et fonction dérivée]

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

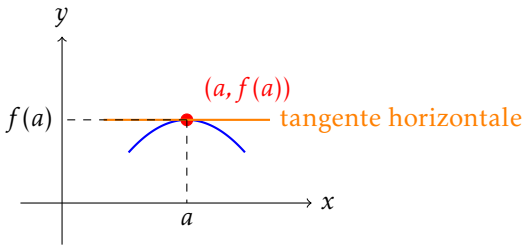
1. On dit que f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en chaque point $a \in \mathring{I}$ (intérieur de I) et si, aux extrémités, les dérivées à droite ou à gauche existent lorsque cela est nécessaire.
2. La fonction f' définie par
$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \longmapsto f'(a)$$
est appelée la **fonction dérivée** de f sur I, où $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a.

2 Interprétation géométrique du nombre dérivé

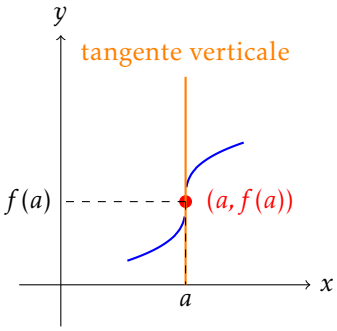
— La dérivabilité de f en a se traduit géométriquement par l'existence d'une tangente en $A(a, f(a))$ de la courbe (C_f), non parallèle à l'axe des abscisses. Cette tangente a pour équation :
$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$



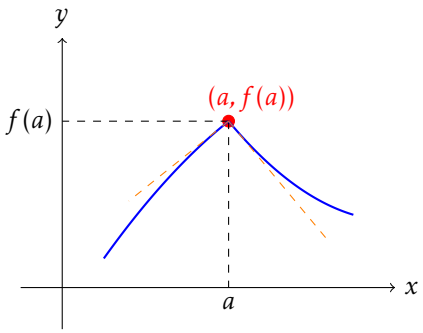
— Le cas particulier $f'(a) = 0$ correspond à une tangente horizontale, c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses.



— Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors la courbe (C_f) admet en A une tangente verticale, c'est-à-dire parallèle à l'axe des ordonnées.



— Si f n'est pas dérivable en a mais que les limites à gauche et à droite, $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$, existent, on parle de demi-tangentes non parallèles à l'axe des ordonnées. Dans ce cas, le point $A(a, f(a))$ est appelé **point anguleux**.



3 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 4.4

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$ (respectivement sur I), et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

1. **Linéarité** : $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a (respectivement sur I) et
$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$
2. **Produit** : $f \times g$ est dérivable en a (respectivement sur I) et
$$(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a).$$
3. **Quotient** : Si de plus $g(a) \neq 0$ (respectivement $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$), alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a (respectivement sur I) et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Preuve.

1. La linéarité découle directement de la linéarité de l'opérateur limite.
2. On calcule le taux d'accroissement :
$$\begin{aligned}\frac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h} &= \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h} \\ &= f(a+h) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot g(a).\end{aligned}$$
En passant à la limite quand $h \to 0$, et utilisant la continuité de f en a (car f est dérivable) :
$$(fg)'(a) = f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a).$$

3. On montre d'abord que $\frac{1}{g}$ est dérivable en a :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{g(a)-g(a+h)}{h\cdot g(a+h)g(a)}\\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\cdot\frac{1}{g(a+h)g(a)}\\ &= -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}\\ &= \left(\frac{1}{g}\right)'(a).\end{aligned}$$

On applique ensuite la règle du produit à $f\times\frac{1}{g}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= f'(a)\cdot\frac{1}{g(a)}+f(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(a)\\ &= f'(a)\cdot\frac{1}{g(a)}+f(a)\cdot\left(-\frac{g'(a)}{(g(a))^2}\right)\\ &= \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.\end{aligned}$$

■

Proposition 4.5 [Dérivée d'une fonction composée]

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et on a :

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\times f'(a).$$

Preuve.
Pour $x \neq a$, on écrit le taux d'accroissement :

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} = \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}.$$

En faisant le changement de variable $y = f(x)$, on obtient :

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} = \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Lorsque $x \to a$, par continuité de f en a, on a $y = f(x) \to f(a)$. Donc :

$$\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} = \lim_{y\to f(a)}\frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(f(a))\times f'(a).$$

■

Corollaire 4.1

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\times f'(x).$$

Proposition 4.6 [Dérivée d'une bijection réciproque]

Soit $f : I \to J$ une bijection avec $J = f(I)$, dérivable en a telle que $f'(a) \neq 0$. Alors sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $b = f(a)$ et on a :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Preuve.
Soient $a \in I$ et $b = f(a) \in J$ avec $f'(a) \neq 0$. Pour tout $y \in J \setminus \{b\}$, posons $x = f^{-1}(y)$. On a alors :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)}.$$

Lorsque $y \to b$, par continuité de f^{-1}, on a $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(b) = a$. Donc :

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Ainsi f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$. ∎

Corollaire 4.2

Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable sur I telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Alors f^{-1} est dérivable sur J et pour tout $y \in J$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

▹ **Exemple 4.4.**

1. La fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ est strictement croissante et dérivable, avec dérivé

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \ \sin'(x) = \cos(x),$$

qui ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, sin est bijective sur cet intervalle, et sa bijection réciproque est donnée par :

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

D'après la formule de dérivation des fonctions réciproques, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Or, en utilisant l'identité $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ pour $y = \arcsin(x)$, on obtient :

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. La fonction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est strictement décroissante et dérivable, avec dérivée

$$\forall x \in [0, \pi], \ \cos'(x) = -\sin x,$$

qui ne s'annule pas sur $]0,\pi[$. Ainsi, cos est bijective sur cet intervalle, et sa bijection réciproque est donnée par :

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi].$$

Pour $x \in]-1,1[$, la dérivée de arccos s'obtient de la même manière :

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}.$$

En utilisant l'identité trigonométrique $\sin^2(y)+\cos^2(y)=1$ pour $y=\arccos(x)$, on a :

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$

Donc :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. La fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante et dérivable, avec dérivée

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0.$$

Elle est donc bijective sur cet intervalle, et sa bijection réciproque est donnée par :

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut calculer la dérivée de arctan en utilisant la formule des fonctions réciproques :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}.$$

Or, comme $\tan(\arctan(x)) = x$, on obtient immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

4 Dérivées d'ordres supérieures

Définition 4.4

Sous réserve d'existence, on définit les dérivées successives de $f : I \to \mathbb{R}$ par :

$$f^{(0)} = f,\quad f^{(1)} = f',\quad f^{(2)} = f'',\quad \text{et pour tout } n \geq 2,\quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

$f^{(n)}$ est appelée **la fonction dérivée d'ordre** n de f sur I.

▹ **Exemple 4.5.**

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 1$. On a

   (a) $f^{(1)}(x) = 12x^3 - 6x^2$.
   (b) $f^{(2)}(x) = 36x^2 - 12x$.
   (c) $f^{(3)}(x) = 72x - 12$.
   (d) $f^{(4)}(x) = 72$.
   (e) $f^{(5)}(x) = 0$.
   (f) $\forall n \geq 5,\ f^{(n)}(x) = 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$. On a

   (a) $f^{(1)}(x) = 2e^{2x}$.
   (b) $f^{(2)}(x) = 4e^{2x}$.
   (c) $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$.

◃ **Remarque 4.4.** ⚠
Ne pas confondre $f^{(n)}$ (dérivée d'ordre n) et $f^n = \underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{n \text{ fois}}$ (puissance n-ième de f).

Définition 4.5 [Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$]

Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note :

1. $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $f^{(n)}$ soit continue sur I
2. $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$

◃ **Remarque 4.5.**

1. On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.
2. On a les inclusions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \leq n, \quad \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}).$$

En particulier,

$$\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}).$$

▹ **Exemple 4.6.**

1. Les fonctions usuelles (polynômes, exponentielles, logarithmes, fonctions trigonométriques, ...) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition. Cependant, certaines fonctions classiques ne sont pas de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine, par exemple, la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ (non dérivable en 0) et la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ (présentant un point anguleux en 0).
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais l'est sur $\mathbb{R}^*$.

Proposition 4.7 [Formule de Leibniz]

Si $f, g \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$, alors $f \times g \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et, pour tout $a \in I$, on a

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) \times g^{(n-k)}(a),$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Preuve.
La démonstration se fait par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, la formule $(fg)^{(0)} = fg$ est triviale.

Soit $n \geq 0$ fixé. Supposons que la formule soit vraie pour cet entier n, c'est-à-dire :

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) \times g^{(n-k)}(a), \quad \forall a \in I.$$

En dérivant, on obtient

$$(f \times g)^{(n+1)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big(f^{(k+1)}(a) \times g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a) \times g^{(n+1-k)}(a) \Big).$$

En ré-indexant la première somme et en utilisant la relation de Pascal

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k,$$

on en déduit

$$(f \times g)^{(n+1)}(a) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}(a) \times g^{(n+1-k)}(a).$$

Par récurrence, la formule est donc vraie pour tout $n \geq 0$. ■

▹ **Exemple 4.7.**
Calculons la dérivée dixième de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 \cos x$.
On pose

$$u(x) = x^3, \quad v(x) = \cos(x), \quad \text{donc } u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}).$$

Les dérivées successives sont :

$$u^{(0)}(x) = x^3, \quad u^{(1)}(x) = 3x^2, \quad u^{(2)}(x) = 6x, \quad u^{(3)}(x) = 6, \quad u^{(k)}(x) = 0 \text{ pour } k \geq 4,$$
$$v^{(p)}(x) = \cos\left(x + \frac{p\pi}{2}\right), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Appliquons la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
(f)^{(10)}(x) &= (uv)^{(10)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k u^{(k)}(x) v^{(10-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{3} C_{10}^k u^{(k)}(x) v^{(10-k)}(x) \quad (\text{car } u^{(k)} = 0 \text{ pour } k \geq 4) \\
&= C_{10}^0 x^3 v^{(10)}(x) + C_{10}^1 3x^2 v^{(9)}(x) + C_{10}^2 6x v^{(8)}(x) + C_{10}^3 6 v^{(7)}(x) \\
&= x^3 \cos(x + 5\pi) + 30x^2 \cos\left(x + \frac{9\pi}{2}\right) + 270x \cos(x + 4\pi) + 720 \cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

En simplifiant les fonctions trigonométriques avec $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f)^{(10)}(x) = -x^3 \cos(x) - 30x^2 \sin(x) + 270x \cos(x) + 720 \sin(x).$$

5 Théorèmes fondamentaux

Définition 4.6 [Extremums locaux]

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f admet un **maximum local** en a (resp. **minimum local** en a) s'il existe un voisinage $V =]a - \alpha, a + \alpha[$, $\alpha > 0$ de a tel que

   $$\forall x \in V \cap I, \quad f(x) \leq f(a)$$

   (resp. $\forall x \in V \cap I, \quad f(x) \geq f(a)$).
2. On dit que f admet un **maximum local strict** en a (resp. **minimum local strict** en a) s'il existe un voisinage V de a tel que

   $$\forall x \in I \cap (V \setminus \{a\}), \quad f(x) < f(a)$$

   (resp. $f(x) > f(a)$).
3. Un **extremum local** en a est un maximum local ou un minimum local en a.
4. Un **extremum global** (ou absolu) est un extremum sur tout l'intervalle I.

▹ **Exemple 4.8.**

1. Toute fonction constante admet en tout point un maximum local et un minimum local.
2. $f(x) = |x|$ admet un minimum local strict en 0.

Théorème 4.1 [Extremum local et dérivabilité]

Soient f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$.
On suppose que f est dérivable en a et que f admet un extremum local en a, alors

$$f'(a) = 0.$$

Preuve.
Démontrons le théorème dans le cas d'un minimum local en a.
Comme $a \in \mathring{I}$, il existe $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset I$, d'où

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, \quad f(a) \leq f(x).$$

On a donc :

— Pour $x > a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0,$$

en passant à la limite lorsque $x \to a^+$ on obtient $f'_d(a) \geq 0$.

— Pour $x < a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0,$$

en passant à la limite lorsque $x \to a^-$ on obtient $f'_g(a) \leq 0$.

Comme f est dérivable en a, alors $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$.
Par conséquent, $f'(a)$ est à la fois positif et négatif, donc $f'(a) = 0$. ■

◃ **Remarque 4.6.**

1. Une fonction peut admettre un extremum local en a sans être dérivable en a.
   Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ admet un minimum local en 0 mais n'est pas dérivable en ce point.
2. Si f est dérivable en a tel que $f'(a) = 0$, on ne peut pas déduire que f possède un extremum local en a.
   Par exemple, la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = x^3$ est dérivable en 0 ($f'(0) = 0$) mais n'admet pas d'extremum en 0.

Définition 4.7 [Point critique]

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$.
On dit que a est un **point critique** de f si

$$f'(a) = 0.$$

◃ **Remarque 4.7.** ⚠
Tout point où f admet un extremum local et où f est dérivable est un point critique. Cependant, la réciproque est fausse.

Théorème 4.2 [Théorème de Rolle]

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1. f est continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles.
2. f est dérivable sur $]a,b[$.
3. $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

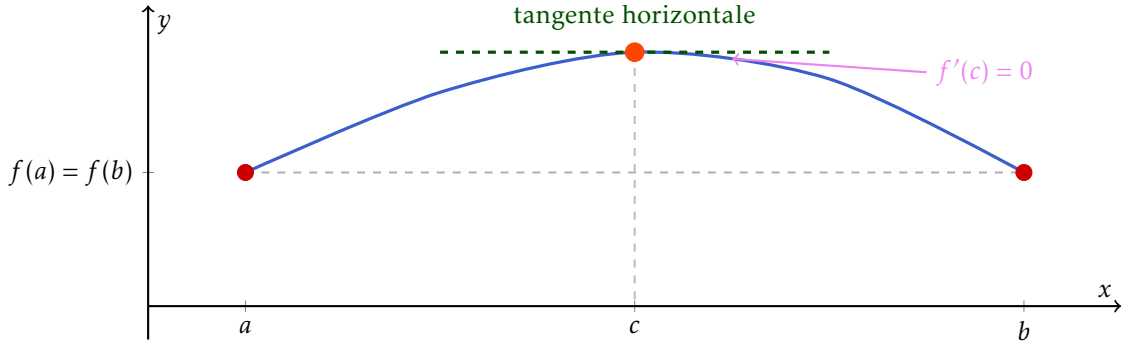
Preuve.

1. Si f est constante sur $[a,b]$, alors $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$.
   Dans ce cas, tout point $c \in]a,b[$ vérifie $f'(c) = 0$.
2. Si f est non constante sur $[a,b]$, alors $\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$.
   Considérons le cas $f(x_0) > f(a)$ (le cas $f(x_0) < f(a)$ se traite de manière analogue).
   - f est continue sur $[a,b]$, donc elle atteint sa borne supérieure :
     $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.
   - Comme $f(c) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$, on a $c \neq a$ et $c \neq b$, donc $c \in]a,b[$.
   - f étant dérivable sur $]a,b[$, $f'(c)$ existe.
   - f présente un maximum global (donc local) en c.
   - D'après le théorème précédent, on en déduit $f'(c) = 0$.

Ceci conclut la preuve. ■

Interprétation géométrique

Le théorème de Rolle[1] affirme que si une courbe représentative part d'un point $(a, f(a))$ et revient exactement au même niveau $(b, f(b))$, alors la courbe doit nécessairement présenter au moins une tangente horizontale entre a et b.
La figure suivante illustre ce résultat.



◃ **Remarque 4.8.** ⚠

1. La constante c dépend de a et de b.
2. Le théorème de Rolle, tout comme le théorème des valeurs intermédiaires, est absolument fondamental ! C'est le deuxième théorème qu'on a vu qui garantit l'existence d'un nombre vérifiant une certaine propriété sans pour autant savoir le calculer ou le déterminer !
3. Remarquez que le théorème de Rolle assure l'existence d'**au moins** un $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$! Il ne dit absolument pas qu'il est unique !
4. Enfin, attention, ce théorème est faux si f est à valeurs complexes ! C'est pour cela qu'on insiste dans la première hypothèse sur « à valeurs réelles ». Par exemple, $f : x \mapsto e^{ix}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$ et $f(0) = f(2\pi) = 1$. Pourtant, pour tout réel $x \in]0, 2\pi[$, $f'(x) = ie^{ix} \neq 0$!

▹ **Exemple 4.9.**
Soient $0 < a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Montrons qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(c)}{c} = f'(c)$.

On considère la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. On a

1. g est continue sur $[a,b]$ (car $0 \notin [a,b]$)
2. g est dérivable sur $]a,b[$
3. $g(a) = g(b) = 0$

1. Michel Rolle, né à Ambert le 21 avril 1652 et mort à Paris le 8 novembre 1719, est un mathématicien français.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $\forall x \in]a,b[$: $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$, donc $g'(c) = 0$ équivaut à :

$$cf'(c) - f(c) = 0 \iff \frac{f(c)}{c} = f'(c).$$

Exercice 4.1
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que :

$$f(a) \neq f(b) \quad \text{et} \quad g(a) \neq g(b).$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}.$$

Indication : Considérer la fonction auxiliaire F définie sur $[a,b]$ par :

$$F(x) = \Big[f(a) - f(b)\Big]g(x) - \Big[g(a) - g(b)\Big]f(x),$$

et appliquer le théorème de Rolle à F.

Théorème 4.3 [Théorème des accroissement finis]

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors :

$$\exists c \in]a,b[\text{ tel que } f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Preuve.
Considérons la fonction auxiliaire $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

- g est continue sur $[a,b]$ (comme somme de fonctions continues)
- g est dérivable sur $]a,b[$ (comme somme de fonctions dérivables)
- Calculons $g(a)$ et $g(b)$:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = f(a),$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - [f(b) - f(a)] = f(a).$$

Donc $g(a) = g(b)$.
La fonction g satisfait les hypothèses du théorème de Rolle sur $[a,b]$. Ainsi, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Or :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Donc $g'(c) = 0$ équivaut à :

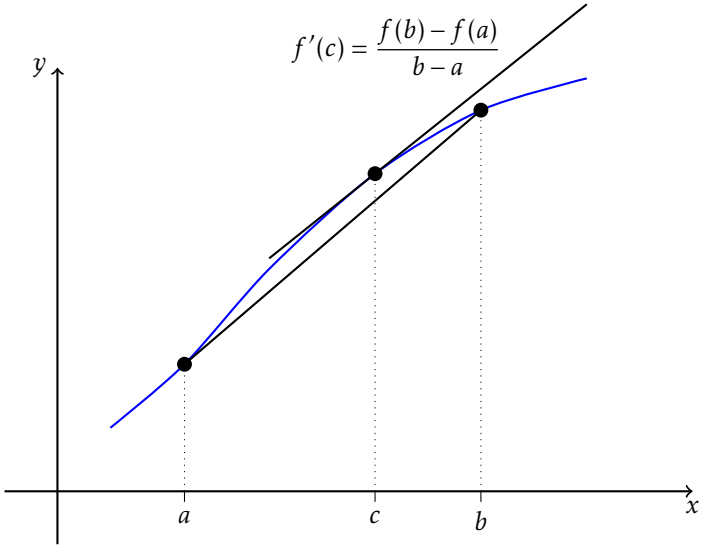
$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \iff f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

■

Interprétation géométrique

Le théorème des accroissements finis affirme qu'il existe au moins un point de la courbe représentative (C_f), d'abscisse située dans l'intervalle $]a,b[$, en lequel la tangente est parallèle à la droite joignant les points

$A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.
La figure suivante illustre ce résultat.



◃ **Remarque 4.9.** ⚠

1. Le théorème des accroissements finis généralise le théorème de Rolle. En effet, si $f(a) = f(b)$, la formule devient $f'(c) = 0$, ce qui correspond exactement à la conclusion du théorème de Rolle.
2. Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis ne sont valables que pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

▹ **Exemple 4.10.**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. En utilisant la fonction $g = \ln \circ f$, montrons qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{\ln\big(f(b)\big) - \ln\big(f(a)\big)}{b-a}.$$

On considère la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$.

- f étant à valeurs strictement positives ($f(x) > 0$), donc g est bien définie.
- g est continue sur $[a,b]$ comme composée de fonctions continues (ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$).
- g est dérivable sur $]a,b[$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in]a,b[$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{(dérivée de } \ln \circ f\text{)}.$$

La fonction g vérifie donc les hypothèses du théorème des accroissements finis (TAF) sur $[a,b]$.
D'après le TAF, il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$g(b) - g(a) = (b-a)g'(c).$$

En remplaçant par les expressions de g et g', on obtient :

$$\ln\big(f(b)\big) - \ln\big(f(a)\big) = (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}.$$

D'où :

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{\ln\big(f(b)\big) - \ln\big(f(a)\big)}{b-a}.$$

Corollaire 4.3

Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et à valeurs réelles.

1. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que :
$$\forall x \in]a,b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$
Alors :
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$
2. **Inégalité des accroissements finis :** On suppose qu'il existe $k \in [0,+\infty[$ tel que :
$$\forall x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leqslant k.$$
Alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$, et en particulier :
$$|f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|.$$

Preuve.

1. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$
Comme $m \leqslant f'(c) \leqslant M$, on obtient immédiatement l'encadrement.
2. L'hypothèse $|f'(x)| \leqslant k$ implique que pour tous $x_1, x_2 \in [a,b]$ avec $x_1 < x_2$, en appliquant 1. avec $m = -k$ et $M = k$, on a :
$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant k(x_2 - x_1) = k|x_2 - x_1|.$$
Ce qui prouve que f est k-lipschitzienne. Le cas particulier $x_1 = a$ et $x_2 = b$ donne l'inégalité des accroissements finis.

■

Exercice 4.2
Montrer que si f est continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles, dérivable sur $]a,b[$ et si f' ne s'annule pas, alors f est injective.

Corollaire 4.4

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Preuve.
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors f' est continue sur le segment $[a,b]$.
Or une fonction continue sur un $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes ; ainsi, f' est bornée sur $[a,b]$.
Il existe donc une constante $k \geq 0$ telle que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in [a,b]$.
On en déduit que f est lipschitzienne sur $[a,b]$, en appliquant le deuxième résultat du corollaire 4.3. ■

6 Application aux variations d'une fonction

Ce paragraphe établit le lien fondamental entre le signe de la dérivée f' et le sens de variation de la fonction f. Bien que ce résultat soit couramment utilisé depuis le lycée, nous en proposons ici une démonstration rigoureuse, fondée sur le théorème des accroissements finis.

Proposition 4.8

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathring{I}$.

1. f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$.
2. f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$.

3. f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$.
4. Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sur $\mathring{I}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Preuve.

1. ($\Rightarrow$) Si f est constante, alors pour tout $x \in \mathring{I}$,
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$
($\Leftarrow$) Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) = 0.$$
Ainsi $f(a) = f(b)$, donc f est constante sur I.
2. Montrons le cas de la croissance (le cas de la décroissance est analogue).
($\Rightarrow$) Si f est croissante, alors pour tout $x_0 \in \mathring{I}$ et $h > 0$ petit,
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$
En passant à la limite $h \to 0$, on obtient $f'(x_0) \geq 0$.
($\Leftarrow$) Si $f'(x) \geq 0$ sur $\mathring{I}$, alors pour $a, b \in I$ avec $a < b$, il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \geq 0,$$
donc $f(b) \geq f(a)$ et f est croissante.
3. Supposons $f'(x) > 0$ sauf en un nombre fini de points. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f'(x) > 0$ sur tout $[a, b]$, alors $f(b) > f(a)$ par le même raisonnement qu'au point 2.
Si f' s'annule en certains points, on découpe $[a, b]$ en sous-intervalles où $f' > 0$ et on conclut encore $f(b) > f(a)$.

■

◃ **Remarque 4.10.**

1. La réciproque du point 4 est fausse : une fonction peut être strictement croissante tout en ayant une dérivée qui s'annule. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ vérifie $f'(0) = 0$, mais f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Pour une fonction dérivable, on a les implications :
$$f' > 0 \Rightarrow f \text{ strict. croiss.} \Rightarrow f' \geq 0,$$
mais aucune réciproque n'est vraie en général.

7 Règles de l'Hôpital

Proposition 4.9

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, continues sur I, dérivables sur $I \setminus \{a\}$ (avec $a \in I$), telles que g et g' ne s'annulent pas sur $I \setminus \{a\}$.

1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ et si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (où $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$), alors
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ et si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

◃ **Remarque 4.11.** ⚠

1. La règle de l'Hôpital s'applique **uniquement** aux formes indéterminées de type : $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.
2. Les autres formes indéterminées doivent d'abord être transformées en $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$:
   — Le cas indéterminée $0\times\infty$ se ramène au cas $\frac{0}{0}$ en posant : $f(x)g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.
   — Le cas indéterminée $\infty-\infty$ se ramène au cas $\frac{0}{0}$ en posant : $f(x)-g(x) = \dfrac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$
   — Les cas 0^0, 1^∞ et ∞^0 se ramènent aux cas précédents en passant au logarithme :
   $$\ln(f(x)^{g(x)}) = g(x)\ln(f(x)),\ (\text{ avec } f(x)>0).$$
3. On peut appliquer la règle successivement si les fonctions restent dérivables et que le quotient forme à chaque étape une indétermination $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.
4. La réciproque est fausse. L'existence de $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ n'implique pas celle de $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
   Par exemple, on considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$
   On a
   $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{mais} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ n'a pas de limite en } 0.$$

▹ **Exemple 4.11.**
Calculons les limites suivantes en appliquant les règles de l'Hôpital.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. On a $\sin x\to 0$ et $x\to 0$. D'après la règle de l'Hôpital :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}$. On a $x\to+\infty$ et $e^x\to+\infty$. D'après la règle de l'Hôpital :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$. On réécrit $x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, ce qui donne une forme $\frac{-\infty}{+\infty}$. D'après la règle de l'Hôpital :
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. On a bien $\frac{1}{\sin x}\to+\infty$ et $\frac{1}{x}\to+\infty$. Réduction au même dénominateur :
$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} = \frac{x-\sin x}{x\sin x}.$$
Forme indéterminée $\frac{0}{0}$, donc on applique la règle de l'Hôpital :
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}.$$
La nouvelle limite est encore de type $\frac{0}{0}$, donc on applique une deuxième fois la règle de l'Hôpital :
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

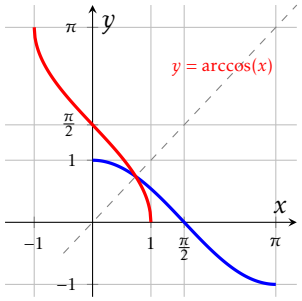
II Fonctions circulaires (directes et réciproques)

1 Les fonctions arccos, arcsin et arctan

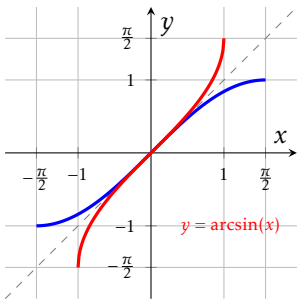
Définition 4.8

1. La restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$ définit une bijection continue de cet intervalle sur $[-1,1]$. Sa fonction réciproque, notée **arccos**, est une bijection continue de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$.
$$y = \arccos(x),\ x \in [-1,1] \iff x = \cos(y),\ y \in [0,\pi].$$
2. La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ définit une bijection continue de cet intervalle sur $[-1,1]$. Sa fonction réciproque, notée **arcsin**, est une bijection continue de $[-1,1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
$$y = \arcsin(x),\ x \in [-1,1] \iff x = \sin(y),\ y \in \left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right].$$
3. La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ définit une bijection continue de cet intervalle sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque, notée **arctan**, est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
$$y = \arctan(x),\ x \in \mathbb{R} \iff x = \tan(y),\ y \in \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[.$$

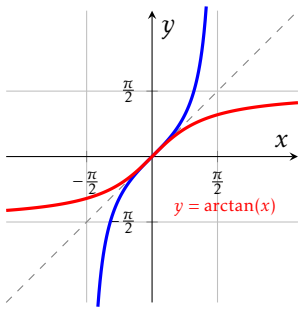
$\mathbf{y} = \arccos(\mathbf{x})$



$\mathbf{y} = \arcsin(\mathbf{x})$



$\mathbf{y} = \arctan(\mathbf{x})$



Proposition 4.10 [Propriétés des fonctions circulaires réciproques]

1. La fonction $x \mapsto \arccos x$:
   — est **définie** et **continue** sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,\pi]$;
   — est strictement **décroissante** sur $[-1,1]$;
   — est **dérivable** sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
2. La fonction $x \mapsto \arcsin x$:
   — est **définie** et **continue** sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$;
   — est **impaire** et strictement **croissante** sur $[-1,1]$;
   — est **dérivable** sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. La fonction $x \mapsto \arctan x$:
   — est **définie** et **continue** sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;
   — est **impaire** et strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$;
   — est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

   — admet pour limites (asymptotes horizontales) :

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4.3
Démontrer les égalités suivantes :

1. $\forall x \in [-1,1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$. (Où $\operatorname{sgn}(x)$ vaut 1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$).
3. $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
4. $\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, $\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.
5. $\forall x \in]-1,1[$, $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

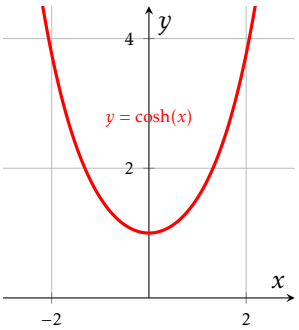
2 Fonctions hyperboliques directes

Définition 4.9

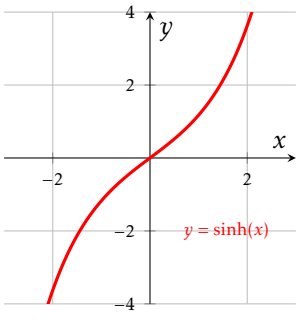
Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions **cosinus hyperbolique** (cosh), **sinus hyperbolique** (sinh) et **tangente hyperbolique** (tanh) par :

1. $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
3. $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

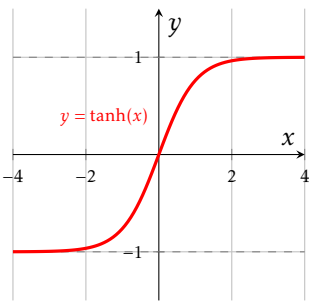
y = cosh(x)



y = sinh(x)



y = tanh(x)



Proposition 4.11

1. La fonction $x \mapsto \cosh(x)$:
   — est **définie**, **continue** et **dérivable** sur $\mathbb{R}$;
   — est **paire** ;
   — est strictement **décroissante** sur $]-\infty, 0]$ et strictement **croissante** sur $[0, +\infty[$;
   — admet un minimum global en 0 (qui vaut 1) et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cosh(x) = +\infty$;
   — a pour dérivée sur $\mathbb{R}$: $\cosh'(x) = \sinh(x)$.
2. La fonction $x \mapsto \sinh(x)$:
   — est **définie**, **continue** et **dérivable** sur $\mathbb{R}$;
   — est **impaire** ;
   — est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$;
   — vérifie $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty$;
   — a pour dérivée sur $\mathbb{R}$: $\sinh'(x) = \cosh(x)$.
3. La fonction $x \mapsto \tanh(x)$:
   — est **définie**, **continue** et **dérivable** sur $\mathbb{R}$;
   — est **impaire** ;
   — est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1, 1[$;
   — admet pour limites (asymptotes horizontales) :
   $$\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1;$$
   — a pour dérivée sur $\mathbb{R}$:
   $$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Les fonctions hyperboliques possèdent des propriétés algébriques très proches de celles des fonctions trigonométriques, comme le montrent les formules ci-dessous

Proposition 4.12

1. On a, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:
   (a) $\sinh(-a) = -\sinh(a)$, $\cosh(-a) = \cosh(a)$ et $\tanh(-a) = -\tanh(a)$.
   (b) $\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$.
   (c) $\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$.
   (d) $\sinh(a-b) = \sinh(a)\cosh(b) - \cosh(a)\sinh(b)$.
   (e) $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$.
   (f) $\cosh(a-b) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)$.
   (g) $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$.
   (h) $\tanh(a-b) = \dfrac{\tanh(a) - \tanh(b)}{1 - \tanh(a)\tanh(b)}$.
   (i) $\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a)$, $\cosh(2a) = \cosh^2(a) + \sinh^2(a)$ et $\tanh(2a) = \dfrac{2\tanh(a)}{1 + \tanh^2(a)}$.
   (j) $\sinh^2(a) = \dfrac{\cosh(2a) - 1}{2}$, $\cosh^2(a) = \dfrac{\cosh(2a) + 1}{2}$ et $\tanh^2(a) = \dfrac{\cosh(2a) - 1}{\cosh(2a) + 1}$.
2. On a pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$:
   (a) $\sinh(p) + \sinh(q) = 2\sinh\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
   $\sinh(p) - \sinh(q) = 2\cosh\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sinh\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.
   (b) $\cosh(p) + \cosh(q) = 2\cosh\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
   $\cosh(p) - \cosh(q) = 2\sinh\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sinh\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

3 Fonctions hyperboliques réciproques

Définition 4.10

1. La restriction de la fonction cosinus hyperbolique à l'intervalle $[0,+\infty[$ définit une bijection continue de cet intervalle sur $[1,+\infty[$. Sa fonction réciproque, notée **argch**, est une bijection continue de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

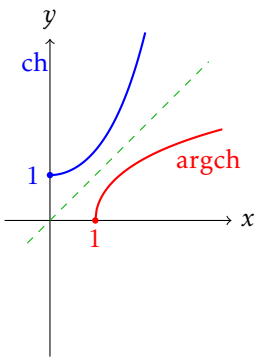
$$y = \operatorname{argch}(x),\ x \in [1,+\infty[\iff x = \cosh(y),\ y \in [0,+\infty[.$$

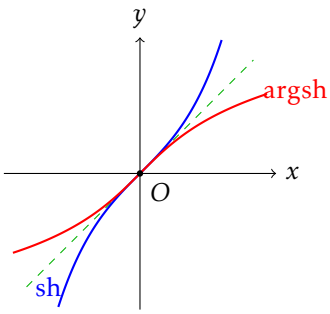
2. La fonction sinus hyperbolique définit une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque, notée **argsh**, est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

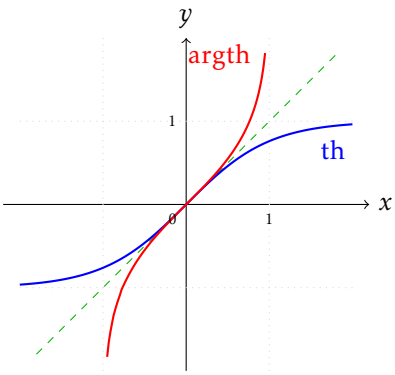
$$y = \operatorname{argsh}(x),\ x \in \mathbb{R} \iff x = \sinh(y),\ y \in \mathbb{R}.$$

3. La fonction tangente hyperbolique définit une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-1,1[$. Sa fonction réciproque, notée **argth**, est une bijection continue de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.

$$y = \operatorname{argth}(x),\ x \in]-1,1[\iff x = \tanh(y),\ y \in \mathbb{R}.$$







Proposition 4.13

1. La fonction argch est **strictement croissante** sur $[1,+\infty[$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x > 1$:

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

De plus, on a pour tout $x \geq 1$:

$$\forall x \in [1,+\infty[:\ \ \operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

2. La fonction argsh est **impaire** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \ \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

De plus, on a l'expression logarithmique suivante :

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

3. La fonction argth est **impaire** et **strictement croissante** sur $]-1,1[$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$
De plus, on a l'expression logarithmique suivante :
$$\forall x \in]-1,1[: \quad \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

5 Développements Limités

I Comparaison de fonctions

Avant d'aborder les développements limités, il est nécessaire de définir des outils pour comparer le comportement des fonctions autour d'un point. On utilisera les notations de Landau [1] afin d'exprimer la négligeabilité, la domination ou l'équivalence des fonctions.

Dans toute cette section, f et g désignent des fonctions définies dans un voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$, sauf éventuellement en a. On suppose que g ne s'annule pas sur ce voisinage (sauf peut-être en a).

Définition 5.1 [Négligeabilité]

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On note :

$$f(x) \underset{a}{=} o\Big(g(x)\Big).$$

▹ **Exemple 5.1.**

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0 \implies x^2 \underset{0}{=} o(x)$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0 \implies \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = 0 \implies x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \implies \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$.

◃ **Remarque 5.1.** ⚠
Il est important de noter que $o(g)$ ne désigne pas une fonction unique, mais un **ensemble** de fonctions.

1. $o(g)$ est l'ensemble des fonctions u telles que
$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{g(x)} = 0.$$
2. On écrit usuellement $f = o(g)$ alors qu'il faudrait $f \in o(g)$. Ici, "=" exprime une **appartenance**, non une égalité classique.
3. Cette égalité n'est pas symétrique :
$$f(x) \underset{a}{=} o\Big(g(x)\Big) \text{ est vrai, mais } o\Big(g(x)\Big) \underset{a}{=} f(x) \text{ n'a pas de sens.}$$
4. La somme de fonctions négligeables reste négligeable :
$$u, v \in o(g) \implies u + v \in o(g).$$
Ainsi, l'écriture usuelle
$$o(g) + o(g) = o(g),$$
est un abus de langage pour dire que "la somme de fonctions négligeables reste négligeable", et non une addition d'ensembles au sens général.

1. Edmund Landau (1877–1938), mathématicien allemand, a formalisé ces notations pour étudier le comportement asymptotique des fonctions.

Définition 5.2 [Domination]

On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a s'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout x suffisamment proche de a :

$$|f(x)| \leq M\,|g(x)|.$$

Autrement dit, le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ est borné au voisinage de a. On note :

$$f(x) \underset{a}{=} O\big(g(x)\big).$$

▹ **Exemple 5.2.**

1. $x\sin(x) \underset{+\infty}{=} O\big(x\big)$.
2. $2x^3+3x^2 \underset{0}{=} O\big(x^2\big)$.
3. $2x^3+3x^2 \underset{+\infty}{=} O\big(x^3\big)$.

◃ **Remarque 5.2.**

1. f est bornée au voisinage de $a \iff f(x) \underset{a}{=} O\big(1\big)$.
2. Si $f = o(g)$, alors $f = O(g)$. La réciproque est fausse : par exemple, au voisinage de $+\infty$, on a $\cos(x) = O(1)$, mais $\cos(x) \neq o(1)$.

Définition 5.3 [Équivalence]

On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On note :

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x).$$

▹ **Exemple 5.3.**

1. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$.
2. $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$.
3. $\ln(x+1) \underset{0}{\sim} x$.
4. $1-\cos^2(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.
5. $x^4-3x^3+2 \underset{+\infty}{\sim} x^4$.
6. $\ln(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

◃ **Remarque 5.3.** ⚠
Soit f une fonction définie au voisinage de a. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ avec $L \neq 0$, alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{L} = 1 \iff f(x) \underset{a}{\sim} L.$$

Proposition 5.1 [Lien fondamental]

On a les équivalences :

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big) \iff f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x)),$$

avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Preuve.
(1) $\Rightarrow$ (3). Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Posons $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$.

Alors $\varepsilon(x) \to 0$ et $f(x) = g(x)\big(1+\varepsilon(x)\big)$, d'où (3).

(3) $\Rightarrow$ (2). Si $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ avec $\varepsilon(x) \to 0$, on a

$$f(x) - g(x) = g(x)\varepsilon(x) = o\big(g(x)\big),$$

d'où (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Si $f(x) = g(x) + o(g(x))$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + \dfrac{o(g(x))}{g(x)} = 1 + o(1) \to 1$, ce qui donne $f(x) \sim g(x)$, c'est-à-dire (1).

Ainsi (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3), ce qui achève la preuve. ∎

Proposition 5.2 [Propriétés du petit o]

Soient f, g, h, u, v des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a). Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. **Transitivité.** $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} o(h(x)) \implies f(x) \underset{a}{=} o(h(x))$.
2. **Stabilité par addition.** $u(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ et $v(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \implies u(x) + v(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.
3. **Produit par une fonction.** Pour toute fonction f définie au voisinage de a,
$$f(x) \cdot o(g(x)) \underset{a}{=} o(f(x)g(x)).$$
Autrement dit, si $\varepsilon(x) \underset{a}{=} o(g(x))$, alors $f(x)\varepsilon(x) \underset{a}{=} o(f(x)g(x))$.
4. **Produit de négligeables.** Si $u(x) \underset{a}{=} o(f(x))$ et $v(x) \underset{a}{=} o(g(x))$, alors
$$u(x)v(x) \underset{a}{=} o(f(x)g(x)).$$
5. **Multiplication par un scalaire non nul.** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$,
$$o(\lambda g(x)) \underset{a}{=} o(g(x)).$$
6. **Non-symétrie.** En général,
$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \not\Longrightarrow g(x) \underset{a}{=} o(f(x)).$$

▹ **Exemple 5.4.**

1. Transitivité : $x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ et $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^3) \implies x \underset{+\infty}{=} o(x^3)$.
2. Stabilité par addition : $\dfrac{1}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\dfrac{\ln x}{x^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right) \implies \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. Produit par une fonction :
$$\sqrt{x}\, o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$
4. Produit de négligeables :
$$o\left(\frac{1}{x}\right) \cdot o\left(\frac{1}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x \ln x}\right).$$
5. Non-symétrie : $\dfrac{1}{x} \underset{+\infty}{=} o(1)$, mais $1 \underset{+\infty}{\neq} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Proposition 5.3 [Propriétés du grand O]

Soient f, g, h, u, v des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On a :

1. **Réflexivité :** $f(x) \underset{a}{=} O(f(x))$.
2. **Transitivité :** $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} O(h(x)) \implies f(x) \underset{a}{=} O(h(x))$.

3. **Stabilité par addition :** $u(x) \underset{a}{=} O(f(x))$ et $v(x) \underset{a}{=} O(f(x)) \implies u(x)+v(x) \underset{a}{=} O(f(x))$.
4. **Produit :** $u(x) \underset{a}{=} O(f(x))$ et $v(x) \underset{a}{=} O(g(x)) \implies u(x)v(x) \underset{a}{=} O(f(x)g(x))$.
5. **Produit par une fonction :** $f(x)\cdot O(g(x)) \underset{a}{=} O(f(x)g(x))$.
6. **Multiplication par un scalaire non nul :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $O(\lambda f(x)) \underset{a}{=} O(f(x))$.

▹ **Exemple 5.5.**

1. Réflexivité : $x^2+3x \underset{+\infty}{=} O(x^2+3x)$.
2. Transitivité : $x^2 \underset{+\infty}{=} O(x^3)$ et $x^3 \underset{+\infty}{=} O(x^4) \implies x^2 \underset{+\infty}{=} O(x^4)$.
3. Produit : $O(x)\cdot O(\ln x) \underset{+\infty}{=} O(x\ln x)$.
4. Produit par une fonction : $x^3 \cdot O\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} O(x^2)$.
5. Multiplication par un scalaire : $O(5x^2) \underset{+\infty}{=} O(x^2)$.

Proposition 5.4 [Propriétés de l'équivalence $\sim$]

Soient f,g,h,u,v des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, ne s'annulant pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a). Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. **Réflexivité :** $f(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
2. **Symétrie :** $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \implies g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
3. **Transitivité :** $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{a}{\sim} h(x) \implies f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$.
4. **Compatibilité avec le produit** $f(x) \underset{a}{\sim} u(x)$ et $g(x) \underset{a}{\sim} v(x) \implies f(x)g(x) \underset{a}{\sim} u(x)v(x)$.
5. **Compatibilité avec le quotient :** $f(x) \underset{a}{\sim} u(x)$ et $g(x) \underset{a}{\sim} v(x) \implies \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{a}{\sim} \dfrac{u(x)}{v(x)}$ (si g et v non nulles).
6. **Compatibilité avec les puissances :** $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \implies \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^\alpha(x) \underset{a}{\sim} g^\alpha(x)$ (lorsque cela est bien défini).
7. **Non-compatibilité avec l'addition :** En général, $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \not\implies f(x)+h(x) \underset{a}{\sim} g(x)+h(x)$.

▹ **Exemple 5.6.**

1. Réflexivité : $x^2+x \underset{+\infty}{\sim} x^2+x$.
2. Symétrie : $x^2+3x \underset{+\infty}{\sim} x^2 \implies x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2+3x$.
3. Transitivité : $x^2+3x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2+1 \implies x^2+3x \sim x^2+1$.
4. Compatibilité avec le quotient : $x^2+3x+1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $x+5 \underset{+\infty}{\sim} x \implies \dfrac{x^2+3x+1}{x+5} \underset{+\infty}{\sim} x$.
5. Compatibilité avec les puissances : $x^2+1 \underset{+\infty}{\sim} x^2 \implies \sqrt{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} x$.
6. Non-stabilité par addition : $f(x)=x+1 \underset{+\infty}{\sim} g(x)=x$, $h(x)=-x \implies f(x)+h(x)=1 \underset{+\infty}{\not\sim} 0=g(x)+h(x)$.

II Développements limités

1 Introduction

L'objectif des développements limités est de remplacer localement une fonction, au voisinage d'un point, par un polynôme dont les propriétés coïncident avec celles de la fonction jusqu'à un certain ordre.

Illustrons cette idée avec la fonction exponentielle. Pour connaître le comportement de la fonction f définie par $f(x) = e^x$ près de $x = 0$, on peut, en première approximation, utiliser sa tangente en ce point, d'équation $y = 1 + x$ (polynôme de degré 1). Géométriquement, cela revient à approcher la courbe par une droite, ce qui correspond à un **développement limité à l'ordre 1**.

Si l'on souhaite une approximation plus fine, on peut chercher à remplacer la droite par une parabole de la forme $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ (polynôme de degré 2). Pour qu'elle épouse au mieux la courbe de l'exponentielle autour de 0, il est naturel d'exiger qu'elle partage avec f non seulement sa valeur en 0, mais aussi sa dérivée première et sa dérivée seconde. Ces conditions déterminent les coefficients de façon unique et conduisent à :

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

On vérifie aisément qu'en posant $g(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$, on a bien

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0 \quad \text{et} \quad g''(0) = 0.$$

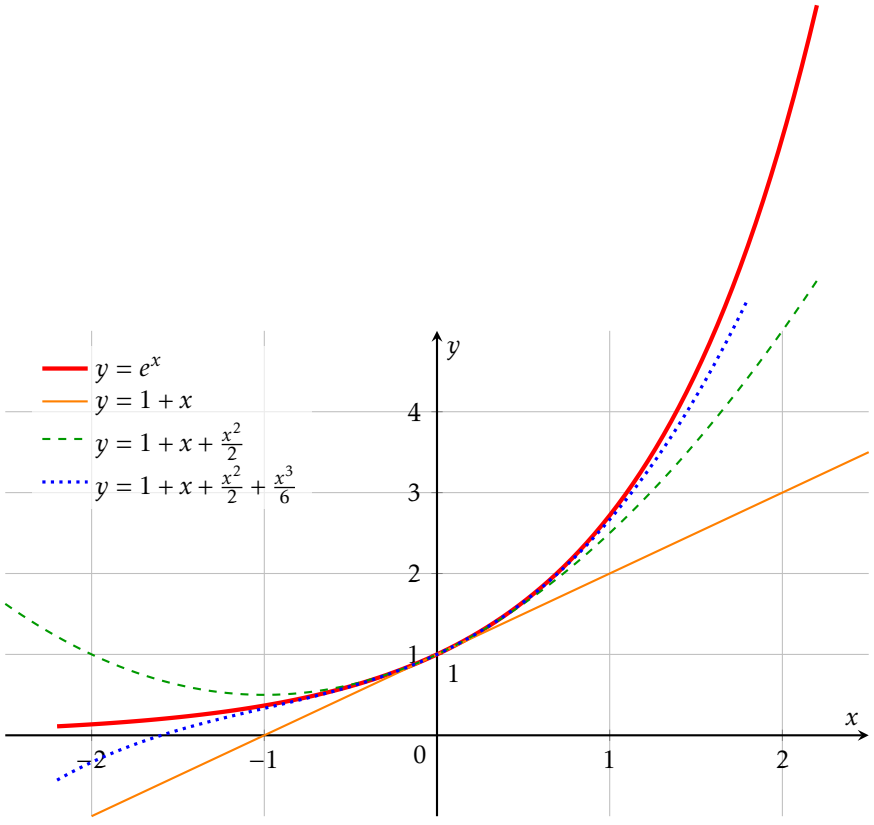
Cette construction correspond exactement au **développement limité de l'exponentielle à l'ordre 2**.

En poursuivant la démarche à l'ordre suivant, on obtient l'approximation polynomiale du troisième degré :

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

qui constitue le **développement limité à l'ordre 3**.

Plus l'ordre augmente, plus le polynôme approchant reproduit avec précision le comportement local de la fonction.



2 Formules de Taylor

Cette sous-section présente trois variantes de la formule de Taylor. Bien qu'elles reposent sur le même polynôme de Taylor, elles se distinguent par la nature du terme d'erreur, appelé reste.

1. Nous commencerons par la **formule de Taylor avec reste intégral**, qui fournit une expression explicite et exacte du reste.

2. Nous poursuivrons avec la **formule de Taylor–Lagrange**, faisant intervenir une valeur $f^{(n+1)}(c)$, et permettant d'obtenir un encadrement global de l'erreur.
3. Nous terminerons avec la **formule de Taylor–Young**, qui fournit une information asymptotique de type $o(x^n)$, outil privilégié pour l'étude locale des fonctions et le calcul de limites.

2.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 5.1 [Formule de Taylor avec reste intégral]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. Alors, pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

où le reste intégral est donné par :

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Preuve.

Soit F la fonction définie sur I par : $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et vérifie :

$$F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0.$$

Pour $x \in I$, on écrit

$$F(x) = \int_a^x F'(t)\,dt.$$

En intégrant par parties de façon itérative, on obtient

$$F(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n F^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Comme $F^{(n+1)} = f^{(n+1)}$, on en déduit l'expression annoncée du reste. ∎

◃ **Remarque 5.4.**
L'égalité donnée par le théorème précédent est appelée **développement de Taylor de la fonction f au voisinage de a à l'ordre n**.

▹ **Exemple 5.7.**

1. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et développons-la au voisinage de $a = 0$ à l'ordre n. Comme $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

où le reste intégral est donné par

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt.$$

2. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, entre 0 et x, à la fonction considérée à la question 1). On obtient :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t\,dt.$$

Si $x \geq 0$, alors pour tout $t \in [0,x]$, on a $\frac{(x-t)^2}{2} e^t \geq 0$. Par conséquent,

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t \, dt \geq 0.$$

Il vient donc :

$$\forall x \geq 0 : \quad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

3. Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x)$. On calcule ses dérivées :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

En particulier,

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1.$$

Écrivons la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral entre 0 et x :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-t) f''(t) \, dt$$
$$\ln(1+x) = x - \int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2} \, dt.$$

Si $x \geq 0$, alors pour tout $t \in [0,x]$, on a $x - t \geq 0$ et $(1+t)^2 > 0$, d'où

$$\frac{x-t}{(1+t)^2} \geq 0.$$

Ainsi,

$$\int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2} \, dt \geq 0,$$

et par conséquent,

$$\ln(1+x) - x = -\int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2} \, dt \leq 0.$$

On en déduit que

$$\forall x \geq 0 : \quad \ln(1+x) \leq x.$$

2.2 Formule de Taylor–Lagrange

Théorème 5.2 [Formule de Taylor–Lagrange]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I jusqu'à l'ordre $n+1$ et $a, x \in I$. Alors il existe c strictement compris entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Preuve.
On définit la fonction auxiliaire $\phi : I \to \mathbb{R}$ par

$$\phi(t) = f(t) - \left[f(a) + f'(a)(t-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n \right].$$

Alors ϕ est $n+1$ fois dérivable sur I et, par construction,

$$\phi^{(k)}(a) = 0 \quad \text{pour tout } k = 0, 1, \ldots, n.$$

On considère ensuite la fonction

$$g : I \to \mathbb{R}, \quad g(t) = \phi(t) - \phi(x)\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{n+1}.$$

La fonction g est $n+1$ fois dérivable sur I et vérifie

$$g(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 0.$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]a, x[$ (ou $]x, a[$) tel que

$$g'(c_1) = 0.$$

On remarque que $g'(a) = 0$. En effet, on a $\phi'(a) = 0$ et la dérivée de $\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{n+1}$ s'annule en $t = a$. Ainsi,

$$g'(a) = g'(c_1) = 0.$$

La fonction g' étant continue sur $[a, c_1]$ et dérivable sur $]a, c_1[$, le théorème de Rolle appliqué à g' sur $[a, c_1]$ fournit un point $c_2 \in]a, c_1[$ tel que

$$g''(c_2) = 0.$$

En répétant ce raisonnement, on obtient une suite de points

$$c_1 > c_2 > \cdots > c_{n+1}$$

tels que

$$g^{(k)}(a) = g^{(k)}(c_k) = 0 \quad \text{pour } k = 1, \ldots, n+1.$$

En particulier, il existe un point $c \in]a, x[$ tel que

$$g^{(n+1)}(c) = 0.$$

Or, par dérivation directe, on a

$$g^{(n+1)}(t) = \phi^{(n+1)}(t) - (n+1)!\frac{\phi(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

En évaluant en $t = c$, on obtient

$$\phi^{(n+1)}(c) = (n+1)!\frac{\phi(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Comme $\phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$ pour tout $t \in I$, on en déduit

$$\phi(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

En revenant à la définition de $\phi(x)$, on obtient la formule annoncée. ∎

▹ **Exemple 5.8.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc est $n+1$ fois dérivable sur I pour tout n).
Pour $a = 0$ et $n = 2$, la formule de Taylor–Lagrange donne :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^c}{6}x^3,$$

où c est un certain point entre 0 et x.

Corollaire 5.1 [Formule de Maclaurin]

Si $a = 0$, la formule de Taylor–Lagrange devient :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

avec c entre 0 et x.
Cette formule permet d'approximer les fonctions au voisinage de 0.

2.3 Formule de Taylor–Young

Théorème 5.3 [Formule de Taylor–Young]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\,\varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction définie sur I telle que

$$\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Preuve.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^n$, on peut appliquer la formule de Taylor–Lagrange au rang $n-1$: pour tout $x \in I$, il existe c entre a et x tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

On pose alors

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Comme $f^{(n)}$ est continue en a et $c \to a$ lorsque $x \to a$, on obtient

$$\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Ainsi, on peut écrire

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\,\varepsilon(x),$$

ce qui conclut la démonstration. ■

◃ **Remarque 5.5.**

1. La fonction $\varepsilon(x)$ est appelée **reste au sens de Young**.
2. Si $a = 0$, on obtient la **formule de Maclaurin-Young** :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\,\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

▹ **Exemple 5.9.**

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour $n = 2$ et $a = 0$, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

2. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour $n=3$ et $a=0$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\,\varepsilon(x),\quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

2.4 Résumé

Il existe trois formulations classiques de la formule de Taylor, qui s'écrivent toutes sous la forme générale

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x),$$

où $T_n(x)$ est le **polynôme de Taylor d'ordre n en a**, commun aux trois formules :

$$T_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

La différence entre ces trois formules réside uniquement dans l'expression du reste $R_n(x)$, qui n'est en général pas un polynôme.

Nom de la formule	**Expression du Reste $R_n(x)$**	**Hypothèses sur f**
Taylor avec reste intégral	$\displaystyle\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t$	f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.
Taylor-Lagrange	$\displaystyle\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$	f est $n+1$ fois dérivable sur I
Taylor–Young	$(x-a)^n\varepsilon(x)=o((x-a)^n)$ avec $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$	f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

3 Développements limités

3.1 Fondamentaux des développements limités

Définition 5.4 [Développement Limité]

Soient $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $a\in I$ et $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction. Pour $n\in\mathbb{N}$, on dit que f admet un **développement limité** au point a à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0,c_1,\ldots,c_n$ et une fonction $\varepsilon:I\to\mathbb{R}$ tels que, pour tout $x\in I$,

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+(x-a)^n\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

Vocabulaire:

1. L'égalité précédente est le développement limité de f au voisinage de a à l'ordre n, notée $\boldsymbol{DL_n(a)}$.
2. Le polynôme $P(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-a)^k$ est appelé la **partie régulière** (ou partie polynomiale) du DL.
3. Le terme $R(x)=(x-a)^n\varepsilon(x)$ est appelé le **reste** du DL. On note souvent ce reste à l'aide de la notation de Landau : $o((x-a)^n)$.

◃ **Remarque 5.6.**

1. Le développement limité est une notion locale, c'est-à-dire que le $DL_n(a)$ de f n'a d'intérêt que pour x dans un voisinage de a.

2. Si f admet un $DL_n(a)$, alors elle en possède un pour tout $k \leqslant n$. En effet :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)}_{=(x-a)^k\eta(x)}$$

où $\lim\limits_{x\to a}\eta(x) = 0$.
On dit alors que l'on a **tronqué** le développement limité à l'ordre k.

Proposition 5.5 [Unicité du développement limité]

Si f admet un $DL_n(a)$, alors ce développement limité est unique.

Preuve.
Écrivons deux développements limités d'ordre n pour f :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x),$$

$$f(x) = d_0 + d_1(x-a) + \cdots + d_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_2(x),$$

où $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to a}\varepsilon_2(x) = 0$.
En effectuant la différence, on obtient :

$$(d_0-c_0) + (d_1-c_1)(x-a) + \cdots + (d_n-c_n)(x-a)^n + (x-a)^n(\varepsilon_2(x)-\varepsilon_1(x)) = 0.$$

En évaluant cette égalité en $x = a$, on trouve :

$$d_0 - c_0 = 0.$$

Ensuite, on divise par $(x-a)$ et on évalue à $x = a$:

$$(d_1-c_1) + (d_2-c_2)(x-a) + \cdots + (d_n-c_n)(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}(\varepsilon_2(x)-\varepsilon_1(x)) = 0 \quad\Longrightarrow\quad d_1 - c_1 = 0.$$

On répète cette opération jusqu'au terme $(x-a)^n$, ce qui donne :

$$c_0 = d_0, \quad c_1 = d_1, \quad \ldots, \quad c_n = d_n.$$

Ainsi, les parties polynomiales sont identiques et les restes $(x-a)^n\varepsilon(x)$ le sont également. Le développement limité est donc unique. ∎

◃ **Remarque 5.7.**
La formule de Taylor–Young mentionnée précédemment permet d'obtenir les coefficients c_k du développement limité. En effet, en posant

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

on obtient le développement limité de f au voisinage de a à l'ordre n.

Proposition 5.6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a. Alors f admet un développement limité au point a à l'ordre n, donné par la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)\\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.

▹ **Exemple 5.10.**
Déterminons le développement limité d'ordre n (où $n \in \mathbb{N}$) en 0 des fonctions usuelles suivantes :

1. $f(x) = e^x$.
   - La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   - Ses dérivées successives sont données par $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout $(x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.
   - En 0, on a $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   - D'après la formule de Taylor–Young, le développement limité d'ordre n en 0 de f est :
   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$
2. $f(x) = \ln(1+x)$.
   - La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.
   - On a $f(0) = \ln(1) = 0$. Les dérivées successives se calculent pour $x \in]-1,+\infty[$:
   $$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \quad \text{pour } k \geq 1.$$
   - En 0, on obtient $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pour $k \geq 1$.
   - D'après la formule de Taylor–Young, le développement limité d'ordre n en 0 de f est :
   $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).$$
3. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
   - La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,1[$.
   - Ses dérivées successives sont données pour tout $x < 1$ par :
   $$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$
   - En 0, on a $f^{(k)}(0) = k!$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   - D'après la formule de Taylor–Young, le développement limité d'ordre n en 0 de f est :
   $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

◃ **Remarque 5.8.** ⚠

1. L'existence d'un développement limité à l'ordre 0 en a est équivalente à la continuité de f en a. En effet, f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si
   $$f(x) = f(a) + o(1) \quad \text{lorsque } x \to a,$$
   ce qui signifie précisément que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. L'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en a est équivalente à la dérivabilité de f en a.
   En effet, f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si
   $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad \text{lorsque } x \to a,$$
   ce qui correspond exactement à la définition du nombre dérivé de f en a.
3. Le fait qu'une fonction f admette un développement limité d'ordre n en un point **n'implique pas** que f est de classe $\mathcal{C}^n$.
   En effet, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   On a $f(x) = x^2\left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, on peut écrire :
   $$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$$
   Ainsi, f admet un DL en 0 à l'ordre 2, alors que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 5.7 [Développements limités usuels au voisinage de 0]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $I \subset D_f$ contenant 0. Pour chaque fonction, il existe un voisinage de 0 sur lequel elle admet un développement limité à l'ordre n (formule de Taylor-Young) comme suit :

Fonction	**Intervalle** I	**Développement limité** $DL_n(0)$
e^x	$\mathbb{R}$	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$]-1,+\infty[$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$]-\infty,1[$	$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$]-1,+\infty[$	$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2p+1})$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2p+2})$
$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2p+1})$
$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2p+2})$
$(1+x)^\alpha$	$]-1,+\infty[$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+o(x^{2p+2})$

◃ **Remarque 5.9.** ⚠

1. Si f est une fonction **paire**, alors le développement limité de f en 0 ne contient que des monômes de degré **pair**.
2. Si f est une fonction **impaire**, alors le développement limité de f en 0 ne contient que des monômes de degré **impair**.

3.2 Développement limité autour d'un point quelconque

Soit f une fonction définie dans un voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. La fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a si et seulement si la fonction

$$g : x \longmapsto f(x+a)$$

admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0.

En posant $h = x-a$, l'étude du développement limité de f en a se ramène à celle de la fonction $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0.

▹ **Exemple 5.11.**
Déterminons le $DL_n(a)$ de la fonction f en a dans les cas suivants :

1. $f : x \longmapsto e^x$ en $a = 1$.
   On pose $h = x-a = x-1$. Si x est proche de 1, alors h est proche de 0. Nous allons nous ramener à un DL

de $h \mapsto e^h$ en $h = 0$. On a

$$\begin{aligned} e^x &= e^{1+(x-1)} \\ &= e \cdot e^h \\ &= e\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + o(h^n)\right) \\ &= e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + o\left((x-1)^n\right)\right). \end{aligned}$$

2. $g : x \longmapsto \sin(x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$.
On sait que $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
On se ramène au DL de $h \mapsto \cos(h)$ avec $h = x - a = x - \frac{\pi}{2} \to 0$ quand $x \to \frac{\pi}{2}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \cos(h) \\ &= 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!} + o(h^{2n+1}) \\ &= 1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!} + o\left((x - \frac{\pi}{2})^{2n+1}\right). \end{aligned}$$

3. $h : x \longmapsto \ln(1 + 3x)$ en $a = 1$ à l'ordre 3.
On pose $h = x - a = x - 1 \to 0$ quand $x \to 1$. On obtient :

$$\begin{aligned} \ln(1 + 3x) &= \ln(1 + 3(1 + h)) \\ &= \ln(4 + 3h) \\ &= \ln\left(4\left(1 + \frac{3h}{4}\right)\right) \\ &= \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{3h}{4}\right). \end{aligned}$$

En utilisant le DL de $u :\longmapsto \ln(1 + u)$ en 0 avec $u = \frac{3h}{4}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \ln(1 + 3x) &= \ln 4 + \frac{3}{4}h - \frac{1}{2}\left(\frac{3h}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3h}{4}\right)^3 + o(h^3) \\ &= \ln 4 + \frac{3}{4}(x-1) - \frac{9}{32}(x-1)^2 + \frac{9}{64}(x-1)^3 + o((x-1)^3). \end{aligned}$$

3.3 Opérations sur les développements limités

Proposition 5.8 [Somme et produit]

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n au voisinage de 0. On note leurs développements respectifs :

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

où P et Q sont des polynômes de degré au plus n.

1. **Somme :** La fonction $(f + g)$ admet un DL à l'ordre n en 0 dont la partie régulière est la somme des deux polynômes P et Q :
$$(f + g)(x) = (P + Q)(x) + o(x^n)$$
2. **Produit :** La fonction $(f \cdot g)$ admet un DL à l'ordre n en 0 dont la partie régulière R est obtenue en effectuant le produit $P \cdot Q$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n :
$$(f \cdot g)(x) = R(x) + o(x^n)$$
où $R(x) = [P(x) \times Q(x)]_n$ représente la troncature du produit à l'ordre n.

▹ **Exemple 5.12.**
Déterminons le DL de la fonction f en a à l'ordre n dans les cas suivants :

1. $f(x) = e^x + \cos x$, $a = 0$ et $n = 2$.
   On sait qu'en $a = 0$:
   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
   En faisant la somme des deux développements, on obtient :
   $$\begin{aligned} f(x) &= (1+1) + x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2) \\ &= 2 + x + o(x^2). \end{aligned}$$

2. $f(x) = \sin(x) + \ln(1+x)$, $a = 0$ et $n = 3$.
   On sait qu'en $a = 0$:
   $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$
   En sommant terme à terme :
   $$\begin{aligned} g(x) &= (x+x) - \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3) \\ &= 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

3. $f(x) = e^x \times \sin(x)$ en $a = 0$ à l'ordre 3.
   On écrit les DL en $a = 0$:
   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$
   On effectue le produit en ne gardant que les termes de puissance $\leqslant 3$:
   $$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + \frac{x^2}{2})(x - \frac{x^3}{6}) + o(x^3) \\ &= 1\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + x \times x + \frac{x^2}{2} \times x + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

4. $f(x) = \cos(x)\ln(1+x)$ en $a = 0$ à l'ordre 2.
   Les DL en $a = 0$ à l'ordre 2 sont :
   $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
   En multipliant les parties régulières et en tronquant à l'ordre 2 :
   $$\begin{aligned} g(x) &= (1 - \frac{x^2}{2})(x - \frac{x^2}{2}) + o(x^2) \\ &= 1\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^2}{2} \times x + o(x^2) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Proposition 5.9 [Composition]

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n au voisinage de 0. On note leurs développements respectifs :

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

On suppose que $g(0) = 0$ (c'est-à-dire que le polynôme Q n'a pas de terme constant).
Alors la fonction composée $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$(f \circ g)(x) = R(x) + o(x^n)$$

où la partie régulière R est obtenue en effectuant la substitution du polynôme $Q(x)$ dans le polynôme $P(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n :

$$R(x) = [P(Q(x))]_n$$

▹ **Exemple 5.13.**

1. Déterminons le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$.
   Posons
   $$u(x) = \cos(x) - 1.$$
   On a, au voisinage de 0,
   $$\begin{aligned} u(x) &= \cos(x) - 1 \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$
   Or $u(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$, donc on peut utiliser le développement limité au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto (1 + u(x))^{\frac{1}{2}}$. On a
   $$(1 + u(x))^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2(x)).$$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned} \sqrt{\cos(x)} &= \sqrt{1 + u(x)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{32} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^4). \end{aligned}$$
2. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction g définie par $g(x) = e^{\sin(x)}$.
   Posons
   $$u(x) = \sin(x).$$
   On a, au voisinage de 0,
   $$u(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$
   Or $u(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$, donc on peut utiliser le développement limité au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$. On a
   $$e^{u(x)} = 1 + u(x) + \frac{u^2(x)}{2} + \frac{u^3(x)}{6} + o(u^3(x)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} &= e^{u(x)} \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}(x^2) + \frac{1}{6}(x^3) + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

Proposition 5.10 [Quotient]

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

On suppose que $b_0 = g(0) \neq 0$.
Alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. Sa partie régulière est le quotient de la **division euclidienne selon les puissances croissantes** du polynôme de f par celui de g à l'ordre n :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=0}^{n} q_k x^k + o(x^n),$$

où les coefficients q_k sont calculés par récurrence :

$$q_0 = \frac{a_0}{b_0}, \quad q_1 = \frac{a_1 - q_0 b_1}{b_0}, \quad q_2 = \frac{a_2 - (q_0 b_2 + q_1 b_1)}{b_0}, \quad \dots \quad q_n = \frac{a_n - \sum_{j=0}^{n-1} q_j b_{n-j}}{b_0}.$$

◃ **Remarque 5.10.**

Pour obtenir le DL à l'ordre n en 0 du quotient $\frac{f}{g}$, on peut utiliser la méthode suivante.
Soient

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + o(x^n).$$

On utilise le développement limité classique

$$\frac{1}{1+u(x)} = 1 - u(x) + u^2(x) - u^3(x) + \cdots + (-1)^n u^n(x) + o(u^n(x)) \quad (u(x) \to 0).$$

1. Si $d_0 = 1$, on pose $u(x) = d_1 x + \cdots + d_n x^n + o(x^n)$ et

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{1+u(x)}.$$

2. Si $d_0 \neq 0$ (quelconque), on se ramène au cas précédent en écrivant

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \cdot \frac{1}{1+v(x)}, \quad v(x) = \frac{d_1}{d_0} x + \cdots + \frac{d_n}{d_0} x^n + o(x^n).$$

3. Si $d_0 = 0$, on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.

▹ **Exemple 5.14.**

1. Déterminons le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 5.

Méthode 1.
On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$: $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Pour obtenir ce développement, on utilise les développements limités usuels de sin et cos à l'ordre 5 en 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

On effectue la division de $x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ par $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ selon les puissances croissantes :

$$\begin{array}{l|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\
\cline{2-2}
\underline{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}} & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \\
\underline{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6}} & \\
\frac{2x^5}{15} &
\end{array}$$

Le quotient ainsi obtenu nous donne les coefficients du développement limité recherché. On en déduit :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Méthode 2.
On écrit $\tan(x) = \sin(x) \cdot \dfrac{1}{\cos(x)}$. Au voisinage de 0 à l'ordre 5, on a :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + o(x^5)$$

Posons $u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$. Comme $u(x) \to 0$ quand $x \to 0$, on utilise $\frac{1}{1-u(x)} = 1 + u(x) + u^2(x) + o(u^2(x))$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).
\end{aligned}$$

On effectue le produit $\sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$ en ne gardant que les termes de degré ≤ 5, on obtient :

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right) + o(x^5) \\
&= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^5) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).
\end{aligned}$$

2. Déterminons le développement limité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0.

Méthode 1.
Les développements limités usuels à l'ordre 4 [2] en 0 sont :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \quad \text{et} \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

2. Comme le dénominateur commence par x, la division par x fait perdre un ordre de précision. Pour obtenir un quotient à l'ordre $n = 3$, il est donc nécessaire de pousser les développements du numérateur et du dénominateur à l'ordre $n + 1 = 4$.

On effectue la division de $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ par $x-\frac{x^3}{6}$ selon les puissances croissantes :

$$\begin{array}{l|l}
x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4} & x-\frac{x^3}{6} \\
\cline{2-2}
\quad x-\frac{x^3}{6} & 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3} \\
\cline{1-1}
\quad -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4} & \\
\quad -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12} & \\
\cline{1-1}
\quad \frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{3} & \\
\quad \frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12} & \\
\cline{1-1}
\quad -\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{12} & \\
\quad -\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{18} & \\
\cline{1-1}
\quad \frac{x^5}{12}-\frac{x^6}{18} &
\end{array}$$

D'après le quotient obtenu, on en déduit :

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Méthode 2.
Les développements limités usuels à l'ordre 4 [3] en 0 sont :

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4) \quad \text{et} \quad \sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4).$$

On factorise par x (terme de plus bas degré) au numérateur et au dénominateur, on trouve :

$$\begin{aligned}
h(x)&=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}\\
&=\frac{x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)}{x\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)}\\
&=\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\times\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}.
\end{aligned}$$

On utilise le développement usuel de $\frac{1}{1-u}$ à l'ordre 3, on obtient :

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}=1+\frac{x^2}{6}+o(x^3).$$

3. La simplification par x au numérateur et au dénominateur diminue l'ordre de précision de 1. Pour que le développement final soit à l'ordre 3, il est donc nécessaire de partir d'un développement à l'ordre 4 avant factorisation.

On effectue maintenant le produit en ne conservant que les termes de degré ≤ 3 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)\left(1 + \frac{x^2}{6}\right) + o(x^3) \\ &= 1 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{6}\right) - \frac{x}{2} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^2}{3} \cdot (1) - \frac{x^3}{4} \cdot (1) + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Proposition 5.11 [Intégration des développements limités]

Soit f une fonction dérivable sur un voisinage de 0, et supposons que sa dérivée f' admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Alors, en intégrant terme à terme de 0 à x, on obtient un développement limité de f à l'ordre $(n+1)$ en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt \\ &= f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}). \end{aligned}$$

▹ **Exemple 5.15.**
Déterminons le développement limité de la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x)$ en 0 à l'ordre 7.
On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On pose $u(x) = x^2$. Puisque $u(x) \to 0$ quand $x \to 0$, en utilisant le développement classique

$$\frac{1}{1+u(x)} = 1 - u(x) + u^2(x) - u^3(x) + o(u^3(x)),$$

on obtient :

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6).$$

En appliquant la proposition précédente sur l'intégration des développements limités, on a :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = 0 + \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + o(t^6)\right)dt.$$

En intégrant chaque terme, on obtient :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7).$$

3.4 Application des développements limités

Les développements limités (DL) constituent un outil fondamental de l'analyse mathématique. Ils sont notamment utilisés pour :

— le calcul de limites de fonctions ;
— la détermination de fonctions équivalentes au voisinage d'un point ;
— l'étude de la position de la courbe représentative d'une fonction par rapport à sa tangente.

Calcul de limites

▹ **Exemple 5.16.**

1. Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
   On sait que le DL de la fonction $x \mapsto e^x$ en 0 à l'ordre 2 est donné par :
   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
   Donc :
   $$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
   On en déduit :
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}.$$
2. Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{x^3}$.
   On connaît les développements limités de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ en 0 :
   $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$
   Donc :
   $$\ln(1+x) - \sin x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{2} + o(1)\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} + o(1)\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Développements limités et équivalences

Une conséquence pratique des développements limités est que, au voisinage d'un point, une fonction f est toujours équivalente à la **partie polynomiale** de son DL, en ajoutant progressivement les termes. Autrement dit, si le DL de f est
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$
Selon le nombre de termes que l'on conserve, on peut choisir l'équivalent approprié :

— si $a_0 \neq 0$, on a $f(x) \underset{0}{\sim} a_0$;
— sinon, on inclut le terme suivant et on prend $f(x) \underset{0}{\sim} a_0 + a_1 x$;
— de même, pour un ordre supérieur, on peut écrire $f(x) \underset{0}{\sim} a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, et ainsi de suite.

Cette méthode permet de déterminer facilement des équivalences à différents ordres à partir du DL connu, sans calculs compliqués.

▹ **Exemple 5.17.**

1. Déterminons une fonction équivalente au voisinage de 0 de la fonction f définie par
   $$f(x) = \sin(x) - \ln(1+x).$$
   On sait que, au voisinage de 0,
   $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$
   donc
   $$f(x) = \sin(x) - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

2. Déterminons une fonction équivalente au voisinage de 0 de la fonction g définie par

$$g(x) = e^x - \cos(x).$$

On sait que, au voisinage de 0,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

donc

$$g(x) = e^x - \cos x = x + x^2 + o(x^2) \underset{0}{\sim} x.$$

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 5.12

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL au voisinage de 0 :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_k x^k + o(x^k),$$

où k est le plus petit entier ≥ 2 tel que le coefficient c_k soit non nul. Alors :
— l'équation de la tangente à la courbe de f en 0 est

$$y = c_0 + c_1 x;$$

— la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de 0 est donnée par le signe de

$$f(x) - y = c_k x^k + o(x^k) \underset{0}{\sim} c_k x^k.$$

On distingue trois situations :

1. Si $c_k x^k > 0$, la courbe est **au-dessus** de la tangente.
2. Si $c_k x^k < 0$, la courbe est **en dessous** de la tangente.
3. Si le signe change en passant de $x < 0$ à $x > 0$, la courbe traverse la tangente en 0 : c'est un point d'inflexion.

▹ **Exemple 5.18.**
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x) - \cos(x)$.
Étudions la position relative de sa courbe représentative par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
On sait que, au voisinage de 0,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

donc

$$f(x) = \ln(1+x) - \cos x = -1 + x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

L'équation de la tangente en 0 est donnée par :

$$y = -1 + x.$$

On a

$$f(x) - y = \frac{x^3}{3} + o(x^4) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}.$$

— Pour $x > 0$, $\frac{x^3}{3} > 0$: la courbe est au-dessus de la tangente.
— Pour $x < 0$, $\frac{x^3}{3} < 0$: la courbe est en dessous de la tangente.
Ainsi, le point $A(0,-1)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.