Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques
Fès

Contrôle continu
Analyse 1
Durée : 2h

Année Universitaire 2025/2026
Parcours : TC GMSI
Responsable : M. El Ahmadi

Exercice 1 (6 points)**.**

1. Énoncer la caractérisation de la borne supérieure d'une partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
2. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. On définit :

$$-A = \{-a \mid a \in A\}, \qquad A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\},$$

$$x + A = \{x + a \mid a \in A\}, \qquad AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

   (a) Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
   (b) Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
   (c) Montrer que $\sup(x + A) = x + \sup(A)$.
   (d) L'égalité $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$ est-elle toujours vraie ?
   Si non, donner un contre-exemple et préciser une hypothèse supplémentaire sur A et B pour qu'elle soit vérifiée.

Exercice 2 (4 pt)**.**
Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. On pose

$$E = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq x\}.$$

1. (a) Montrer que E admet une borne supérieure, notée M. Vérifier que $M \in [0, 1]$.
   (b) Montrer que E est stable par f, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in E.$$

   (c) Justifier que $M \in E$.
2. Déduire que $f(M) = M$.

Exercice 3 (3 pt)**.**
Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier chaque réponse par une preuve ou un contre-exemple.

1. $\ll$ Si (u_n) est une suite telle que (u_n^2) converge, alors la suite (u_n) converge.$\gg$
2. $\ll$ Soient (a_n) une suite bornée et (b_n) une suite qui converge vers 0. Alors la suite définie par $u_n = a_n b_n$ converge vers 0.$\gg$
3. $\ll$ Soient (a_n) une suite majorée et (b_n) une suite non majorée. Alors la suite définie par $u_n = a_n b_n$ n'est pas majorée.$\gg$

Exercice 4 (7 pt)**.**
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1 + e^{-k}\right).$$

1. Rappeler la définition d'une suite de Cauchy.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $\ln(1 + x) \leq x$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy.
5. Les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont-elles adjacentes ? Justifier votre réponse.