**Exercice 1.**

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que la fonction $f$ définie par $f(x) = E(\frac{1}{x})$ est en escalier sur $[\frac{1}{n}, 1]$, où $E$ désigne la fonction partie entière.
   (b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$.
2. Montrer que toute fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ est bornée. Ensuite, prouver que la réciproque est fausse en général en donnant un contre-exemple.
3. Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$. Sous quelle condition l'équivalence $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0$ est-elle vraie ?
4. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (1-2x)f'x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$.
   (b) En déduire, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que : $\displaystyle\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \leq \frac{1}{12}\int_0^1 [f'(x)]^2\, dx$.

**Exercice 2.**

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2 - t + 1}dt$.
2. En déduire, en utilisant les sommes de Riemann, la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2 - kn + n^2}$.

**Exercice 3.**

1. En utilisant les primitives usuelles, calculer les intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_{-\ln(3)}^{-\ln(2)} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$. (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)dx$. (c) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\ln(3x)}dx$.

2. En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)dx$. (b) $\displaystyle\int_1^e \sin(\ln(x))dx$.

3. En effectuant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\left(\ln^2(x) - 4\right)}$. (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

**Exercice 4.**
Étudier la nature et, en cas de convergence, calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$. 2. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx$. 3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.